Lehrbuch

der

allgemeinen

Zahlenlehre und Algebra

zum

öffentlichen Gebrauche und Selbstunterrichte.

Von

J. B. Weigl,

königlich bayerischem Professor der Kirchengeschichte und des Kirchenrechtes, und Rektor des Lyceums zu Regensburg.

Mit Tafeln

der Quadrat- und Kubikzahlen, und der nämlichen Wurzeln von 1 bis 1000.

Dritte,

von D. J. B. Wandner, k. b. Lyceal-Professor zu Regensburg, umgearbeitete Ausgabe.

Sulzbach, im Regenkreise Bayerns,

in der J. E. v. Seidel'schen Buchhandlung.

1832.

Inhalt.

Einleitung. Von der Mathematik überhaupt. Seite

Vorbegriffe.

A. Ueber den Gegenstand 1
B. Ueber die Theile 3
C. Ueber den Werth 6
D. Ueber die Methode und Terminologie der Mathematik 7

Erste Abtheilung. Allgemeine Zahlenlehre.

Erster Abschnitt. Vorbegriffe. Von den verschiedenen Größen und ihrer Bezeichnung 14

Erstes Hauptstück. Von den Rechnungsarten überhaupt, und mit ganzen Größen insbesondere 15

Erster Artikel. Von den entgegengesetzten Größen . 17
Zweiter Artikel. Addition 20
Dritter Artikel. Subtraktion 23
Vierter Artikel. Multiplikation 28
Fünfter Artikel. Division 34
Sechster Artikel. Von dem Zerfällen komplexer Größen und der Theilbarkeit der Größen 43

Zweites Hauptstück. Von den Fraktionen überhaupt.

Erster Artikel. Vorbegriffe und Vorübungen . . 52
Zweiter Artikel. Stammrechnungsarten
I. Addition und Subtraktion 56
II. Multiplikation 58
III. Division 59
Dritter Artikel. Kettenbrüche 62

Seite

Drittes Hauptstück. Von der Verbindung der Größen.

Vorbegriffe 65
Erster Artikel. Von dem Permutiren 69
Zweiter Artikel. Von dem Kombiniren . . . 73
Dritter Artikel. Von dem Variiren 81
Wahrscheinlichkeitsrechnung . . 86

Zweiter Abschnitt. Potenzenlehre.

Erstes Hauptstück. Würdenlehre monomischer Größen.

Erster Artikel. Monomische Größen als Würden . 91
Zweiter Artikel. Monomische Größen als Wurzelgrößen
A) Einfache Wurzelgrößen, im Allgemeinen betrachtet 103
B) Stammrechnungsarten mit zusammengesetzten Irrationalgrößen 114

Zweites Hauptstück. Würdenlehre polynomischer Größen.

Erster Artikel. Vom Quadrate 118
Zweiter Artikel. Vom Kubus. 133
Ueber den Gebrauch der Tafeln der Quadrat- und Kubikzahlen und Wurzeln 145
Dritter Artikel. Binomischer Lehrsatz . . . 149
Lambertische Formel 165

Zweite Abtheilung. Algebra.

Vorbegriffe 173
Erster Abschnitt. Algebra im engern Sinne . . 176
Erstes Hauptstück. Bestimmte Analytik . . . 176
Erster Artikel. Einfache Gleichungen mit einer unbekannten Größe 177
Zweiter Artikel. Einfache Gleichungen mit mehrern unbekannten Größen 199
Dritter Artikel. Quadratische Gleichungen . . 220
Vierter Artikel. Kubische Gleichungen . . . 244
Fünfter Artikel. Biquadratische Gleichungen . . 268
Sechster Artikel. Von den höhern Gleichungen überhaupt.
I. Allgemeine Eigenschaften derselben . . . 281
II. Auffindung der rationalen Wurzeln . . . 283

Seite

III. Von den Wurzelschranken 284
IV. Von Auflösung der Gleichungen durch Approximation 287
V. Höhere Gleichungen mit mehrern unbekannten Größen 293

Zweites Hauptstück. Unbestimmte Analytik.

Vorbegriffe 296

Erster Artikel. Unbestimmte Probleme mit mehrern unbekannten Größen und einer Gleichung . . . 297
Auflösung durch Kettenbrüche 304
Zweiter Artikel. Unbestimmte Probleme mil mehrern unbekannten Größen und zwei Gleichungen (Regula Coeci oder Virginum). 309

Zweiter Abschnitt. Von den Proportionen, Progressionen und Logarithmen.

Vorbegriffe 316

Erstes Hauptstück. Von den arithmetischen Proportionen und Progressionen 321

Erster Artikel. Von den arithmetischen Proportionen 322
Zweiter Artikel. Von den arithmet. Progressionen . 324
Dritter Artikel. Von den vieleckigen Zahlen . . 332
Vierter Artikel. Von den arithmetischen Progressionen des zweiten Grades 335
Fünfter Artikel. Von den arithm. Reihen überhaupt 339

Zweites Hauptstück. Von den geometrischen Proportionen und Progressionen

Erster Artikel. Von den geometrischen Verhältnissen 342
Zweiter Artikel. Von den geometr. Proportionen . 345
Dritter Artikel. Von den geometr. Progressionen . 359
Vierter Artikel. Von der Summation der unendlichen abnehmenden Reihen 366

Drittes Hauptstück. Von den Logarithmen.

Vorbegriffe 370
Erster Artikel. Von den briggischen Logarithmen . 373
Zweiter Artikel. Ueber den Gebrauch der logarithmischen Tafeln 383

Seite

Dritter Artikel. Bemerkungen über die natürlichen Logarithmen und die dekadische Ergänzung, und einige Aufgaben über Logarithmenrechnung 388

Vierter Artikel. Anwendung der Logarithmenlehre auf
I. Zinszinsen - und Rentenrechnungen . . . 394
II. Diskonto - oder Interusuriumsrechnungen . . 405
III. Terminrechnungen 407

Dritte Abtheilung.

I. Tafeln der Quadrat - und Kubikzahlen von 1 bis 1000 . 413
II. Tafeln der Quadrat - und Kubikzahlen von 1 bis 1000 . 425

Ein-

Einleitung.

Von der Mathematik überhaupt.

§. 1.

Die Einleitung (τὰ προλεγόμενα) enthält die nothwendigen Vorbegriffe

A) über den Gegenstand,
B) über die Theile,
C) über den Werth,
D) über die Methode und Terminologie der Mathematik.

§. 2.

A) Ueber den Gegenstand.

Mathematik (μάθημα, μάθησις) ist die Wissenschaft von den Formen der Größen.

So wie bei den Alten die Schriften der Dichter κατ' ἐξοχὴν den Namen ποιήματα (opera, Werke) führten; so hieß auch die Mathematik, wegen der Evidenz ihrer Lehren vorzugsweise ἡ Μάθησις, die Wissenschaft.

§. 3.

Erklärungen.

1. Größe (Quantum) heißt ein Ding, in wieferne es aus Theilen besteht, oder bestehend gedacht werden kann, d. h. in wieferne es ein gleichartiges Mannigfaltiges oder Quantität hat, folglich eines Zuwachses oder einer Verminderung fähig ist, z. B. die Länge, Breite, Tiefe der Körper, die Geschwindigkeit ihrer Bewegung u. s. w.

2. Gleichartig (homogenea) nennt man aber Dinge, in wieferne man nur auf das sieht, was sie mit einander gemein haben; ungleichartig (heterogenea), in wieferne man auf das sieht, was in ihnen verschieden ist. Z. B. Ein Dukaten

und ein Thaler sind als Geldstücke gleichartig; hingegen, in wieferne das eine ein Dukaten, das andere ein Thaler ist, ungleichartig.

3. Die Bestimmung des Mannigfaltigen in einem Dinge, und der Art, wie die Verbindung desselben in ihm gedacht wird — d. i. die besondere formale Wesenheit eines Dinges heißt seine Qualität.

4. Dinge von einerlei Quantität heißen gleich (aequalia); Dinge von einerlei Qualität heißen ähnlich (similia); von einerlei Quantität und Qualität congruent (congruentia).

* Deutlicher kann man sagen: ähnlich sind Dinge, welche sich durch nichts, als durch ihre Größe unterscheiden, z. B. ein kleiner und ein großer Zirkel, ein Miniaturgemälde und ein großes Portrait. Gleich sind solche Dinge, welche bloß in der Größe oder im Werthe miteinander übereinkommen, sonst aber unterschieden seyn können, z. B. ein in zwei Dreiecke verwandeltes Quadrat, und diese Dreiecke; ein Gulden in Silber- und in Kupfergeld.

5. Eine Größe heißt stätig, fließend, (quantum continuum) wenn das Gleichartige in ihr so zusammenhängt, daß das Aufhören des Einen zugleich der Anfang des Andern ist; z. B. die Zeit, wo das Ende der vergangenen zugleich der Anfang der zukünftigen ist. Diskret (quantum discretum) nennt man eine Größe, wenn das Mannigfaltige abgesondert ist, z. B. ein Haufen Weitzenkörner.

6. Eine Größe wird ihrer Bedeutung, ihrem Werthe nach erst durch Verbindung und Vergleichung mit andern Größen bestimmt. Die Lehre von dem Zusammenhange der Größen unter sich, von allen Formen ihrer Verbindung heißt Mathematik. (§. 2.)

7. Wird die Quantität eines Dinges A durch ein ihm gleichartiges m bestimmt, d. i. angegeben, wie oft man m nehmen müsse, um A zu erzeugen: so heißt m das Maß oder die Einheit; dieses Bestimmen selbst ein Messen oder Zählen; und die bestimmte Quantität eine Zahl, oder die relative Größe von A, so wie A selbst eine gezählte Größe. Zahl und gezählte Größen unterscheiden sich also, wie Subjekt und Prädikat. Man nennt aber auch gezählte Größen selbst: Zahlen.

§. 4.

B) Ueber die Theile.

Die Mathematik theilt sich

I. in die reine,

II. in die angewandte.

* Rein (Mathesis pura) heißt sie, wenn man von allen wirklichen Gegenständen abstrahirt; angewandt, oder gemischt (Mathesis applicata, mixta), wenn die Lehren der reinen Mathematik auf wirkliche Gegenstände bezogen werden.

§. 5.

I. Die reine Mathematik zerfällt nach ihrem Gegenstande in zwei Haupttheile:

1) in die Arithmetik (im weitesten Sinne), d. i. die Wissenschaft der diskreten Größen.

* Zu den diskreten Größen gehören die Zahlen als Aggregate, daher der Name Arithmetik (ἀριθμὸς, numerus). Weil aber stätige Größen ebenfalls gezählt werden können, so heißt sie auch allgemeine Größenlehre (Mathesis universalis).

2) In die Geometrie (γεωμετρία, terrae mensura), d. i. die Wissenschaft von den stätigen, ausgedehnten Größen.

* Zu den stätigen Größen, die kein Gegenstand der Erfahrung sind (welches von einem Gegenstande der reinen Mathematik gefordert wird), gehört der Raum, als eigentliches Objekt der Geometrie.

** Jener Theil der Geometrie, welcher die Berechnung der Dreiecke mittelst der goniometrischen Linien lehrt, wird häufig als besonderer Theil der Mathematik, unter dem Namen Trigonometrie, aufgeführt.

1. Die Arithmetik wird wieder abgetheilt:

a) in die niedere Arithmetik, deren Grenzen aber noch schwankend sind;

b) in die höhere Arithmetik, welche in ihren Lehren da fortfährt, wo es die niedere Arithmetik ließ.

* Die Arithmetik kann auch eingetheilt werden: in gemeine Rechenkunst, allgemeine Zahlen- auch Größenlehre oder Buch-

stabenrechnung (Lehre von der allgemeinen Bezeichnungsart der Größen und ihrer Formen und den allgemeinern und leichtern Umwandlungen von letztern), Algebra (Lehre von den Gleichungen), höhere Arithmetik (Lehre von den Formen und Eigenschaften der Zahlen), Analysis endlicher und unendlicher Größen (Lehre von den Umwandlungen der Formen von Größen, wobei diese in beständige und veränderliche unterschieden werden). Die Rechenkunst und allgemeine Zahlenlehre begreift man zusammen auch unter dem Namen Arithmetik (im engern Sinne); manchmal bezeichnet man auch gemeine Rechenkunst allein mit dem Worte Arithmetik (im engsten Sinne).

2) Auf gleiche Weise theilt sich die Geometrie

a) in die Elementar- und

b) höhere Geometrie.

Jene beschränkt sich auf die geraden und Kreislinien und auf solche Flächen und Körper, die sich durch diese Linien darstellen lassen. Diese dehnt sich in ihren Untersuchungen auch auf krumme Linien, Flächen und Körper aus, welche nicht durch gerade oder Kreislinien darzustellen sind.

§. 6.

II. Die angewandte Mathematik begreift in sich

1) die praktische Rechenkunst (angewandte Arithmetik), oder die Anwendung der reinen Arithmetik auf die im gemeinen Leben gewöhnlichen Rechnungsfälle.

2) Die praktische Geometrie, d. i. die Anwendung der Geometrie und Trigonometrie auf die Bestimmung der Längen, Höhen, Flächen,

a) auf der Oberfläche der Erde, die Landmeßkunst (Geodaesia — Δαίω, divido),

b) unter der Oberfläche der Erde, die Markscheidekunst (Geometria subterranea).

* Diese Wissenschaften werden gewöhnlich den Lehren der reinen Mathematik entweder eingeschaltet, oder am Ende beigefügt. Uebrigens versteht man unter angewandter Mathematik, ohne Beisatz, dermalen folgende vier:

3) Die mechanischen Wissenschaften, von dem Gleichgewichte und der Bewegung, und zwar:
   a) schwerer fester Körper, Statik und Mechanik,
   b) schwerer, flüssiger Körper, die Hydrostatik und Hydraulik;
   c) der Luft, als eines schweren, flüssigen und elastischen Körpers, die Aerometrie.

4) Die optischen Wissenschaften, vom Lichte:
   a) die Optik, vom Lichte, das von dem Gegenstande in gerader Linie sich allenthalben verbreitet.
   b) Die Perspektive, von der Zeichnung eines Gegenstandes auf einer Ebene, die zwischen ihm und dem Auge in einer bestimmten Lage gesetzt ist.
   c) Die Katoptrik, vom zurückgeworfenen Lichte.
   d) Die Dioptrik, vom gebrochenen Lichte.

5) Die astronomischen Wissenschaften, von den Körpern des Weltgebäudes, und dem dadurch bestimmten Raum- und Zeitmaße auf unsrer Erde: —
   a) Die Astronomie, von der Größe, Bewegung und Verbindung der Weltkörper.
   b) Die Geographie (politische, mathematische), von der Figur und Größe der Erde, und von der Lage der Orte auf ihrer Oberfläche, durch Astronomie bestimmt.
   c) Die Chronologie, oder astronomische Zeitbestimmung.
   d) Die Gnomonik, vom Zeitmaße mittelst des Schattens.

6) Die architektonischen Wissenschaften:
   a) Die Civil- }
   b) . Wasser- } Baukunst,
   c) . Straßen- }
   d) . Artillerie und
   e) : Fortifikation.

* Ja sogar die Musik beruht in mancher Hinsicht auf mathematischen Gründen.

Anmerkung. Die architektonischen Wissenschaften setzen, nebst den mathematischen, noch viele andere Kenntnisse voraus,

und müssen daher aus eigenen Lehrbüchern vollständig erlernt werden. In den mathematischen Schriften berührt man sie gewöhnlich nur ganz kurz am Ende, oder läßt sie gar hinweg.

§. 7.

C) Ueber den Werth der Mathematik

Wenn man den Werth einer Wissenschaft, wenigstens zum Theile, nach ihrem Nutzen, oder nach ihrem Einflusse auf die Befriedigung der dringendsten Bedürfnisse in der menschlichen Gesellschaft beurtheilen darf: so behauptet die Mathematik unter den übrigen Wissenschaften unstreitig einen sehr ehrenvollen Platz. Wirklich sind wenige menschliche Verrichtungen, von denen nicht ein Theil auf mathematischen Gründen beruhet. Sie erstrecket sich weiter, als auf bloß sinnliche Dinge; z. B. auf alle Berechnungen des Wahrscheinlichen und der Hoffnungen, wie bei Leibrenten, Lotterien u. s. w. Man beurtheilt nach ihr den Wachsthum eines Staates an Bürgern, den nöthigen Vorrath der Lebensmittel und anderer Bedürfnisse für ganze Länder. Ueberdieß sind durch sie die Künste, welche uns die Bequemlichkeiten des Lebens erschaffen, erfunden oder vervollkommnet worden. Pflug, Wagen und Schiffe, alle Werkzeuge der Handwerker und Künstler sind Maschinen, von deren Gebrauch und Einrichtung die mathematische Kenntniß richtiger urtheilen lehrt. — Endlich, wie Herr von Segner sagt: „Was in der Philosophie brauchbar, gründlich, erhaben ist, haben wir größtentheils der Mathematik zu verdanken.“ — Ja, sie hat öfters den menschlichen Geist zu einer Höhe erhoben, welche zu erreichen er sich kaum versprechen konnte.

Abgesehen von dem, daß die evidenten mathematischen Wahrheiten schon an sich unbedingten Werth haben, und bei ihrem Anblicke das reinste Vergnügen gewähren, so sollte die Mathematik für den studirenden Jüngling ein doppeltes Interesse haben; denn sie ist ausübende Logik, schärft die Urtheilskraft, stärket die Aufmerksamkeit, übt den Fleiß, gewöhnt ans gründliche Denken, an die schnelle Uebersicht vieler Sätze, und ist dadurch das beste Vorbereitungsmittel zum Studium anderer Wissenschaften. „Sie

ist," wie H. W. Clemm sagt, „weit geschickter, den Verstand zu bilden, als dasjenige, was heut zu Tage vielleicht den Geschmack vieler Studirenden besser anspricht."

§. 8.

D) Ueber die Methode und Terminologie der Mathematik.

Die mathematische Methode, oder die Art, wie Mathematiker ihre Sätze zu erklären pflegen, ist die einzige, welche zur Gewißheit führt, und vor Irrthümern sichert. Auch ist bekannt, daß die Lehrer der Arithmetik und Geometrie über alle Sätze vollkommen einig sind. Die Titel, nach welchen in der Mathematik, so wie in jeder strengen Wissenschaft, die Lehren vorgetragen werden, sind:

1. Erklärungen,
2. Sätze,
3. Beweise,
4. Anmerkungen.

1. Erklärung (definitio) heißt eine deutliche und präcise Darstellung von dem vollständigen Begriffe einer Sache. Sie heißt:

a) genetisch, oder Sacherklärung (definitio realis, genetica), wenn sie die Art angibt, wie die Sache entstehen kann, oder was einerlei ist, wenn sie die Möglichkeit der Sache darthut.

b) Worterklärung (definitio nominalis), wenn durch sie die Möglichkeit der Sache nicht bestimmt ist.

2. Sätze sind entweder

a) theoretische (propositio theoretica), wenn sie angeben, daß etwas so, und nicht anders sey, und zwar

α) ein Grundsatz, (Axioma), dessen Wahrheit schon einleuchtet, sobald man den Sinn desselben gefaßt hat.

β) ein Lehrsatz (Theorema), dessen Wahrheit aus andern bekannten Wahrheiten abgeleitet, oder bewiesen werden muß,

oder b) praktisch, wenn sie angeben, daß etwas geschehen kann oder soll, und zwar

α) eine Forderung, oder ein Postulat, wenn die Möglichkeit, ihm Genüge zu leisten, unmittelbar einleuchtet, sobald man nur versteht, was gefordert wird;

β) eine Aufgabe (Problema), wenn

αα) die Art der Verrichtung erst bestimmt — welches man die Auflösung nennt, und

ββ) die Richtigkeit der Auflösung dargethan werden muß, d. i. wenn die Auflösung eines Beweises bedarf.

3. Ein Beweis (Demonstratio), die Darstellung der Wahrheit eines Satzes aus andern schon bekannten, unbezweifelten Wahrheiten, heißt

a) direkt, wenn er die Richtigkeit des Satzes geradezu zeigt,

b) indirekt, apagogisch, (Ἀπαγωγὴ εἰς ἄτοπον), wenn er die Unmöglichkeit des Gegentheils darthut.

Rücksichtlich der Ordnung, nach welcher die Sätze in einem Beweise auf einander folgen, ist ein Beweis

a) synthetisch, wenn er von den Gründen ausgeht, und zur Conclusion führt,

b) analytisch, wenn er von der Conclusion ausgeht, und zu den Gründen zurückführt.

Man unterscheidet 4. noch

a) Zusätze (Corollaria), Sätze, welche aus andern unmittelbar, oder durch einen leichten Schluß folgen.

b) Lehnsätze (Lemmata), Sätze aus dem Gebiete anderer Wissenschaften, z. B. in der angewandten Mathematik, Sätze aus der Naturlehre.

c) Anmerkungen (Scholia), was zur Erläuterung, Anwendung des Vorhergehenden, zur Geschichte u. s. w. beigesetzt wird, mithin keinen Bestandtheil des Ganzen im strengen Sinne ausmacht.

d) willkührliche Sätze (Hypotheses). In der Arithmetik hat man mit Zahlen zu thun, wovon die Zeichen und viele andere Einrichtungen nicht nothwendig so sind. Wenn nun die Beschaffenheit dieser Zahlen erklärt wird, so geschieht solches in willkührlichen Sätzen, weil sich eben diese Dinge auch durch andere Zeichen hätten andeuten lassen.

Anmerkung. Die mathematische Methode heißt auch die des Euklides, der sie zuerst anwendete. Sie hat den auszeichnenden Vorzug, daß sie ihre Begriffe construiren, d. i. die Gegenstände derselben in ihrer Allgemeinheit anschaulich darstellen, folglich die Bestimmung davon im strengen Sinne demonstriren kann. Das Wesentliche dieser Methode ist, daß man aus sichern, ganz unbezweifelten Gründen, durch richtige Schlüsse das zeigt, was man sagen will. Die Vordersätze der Schlüsse werden deßwegen aus den vorangeschickten Erklärungen, Grundsätzen, und andern schon bewiesenen Sätzen genommen. — Doch ist es nicht nothwendig, daß man über jeden Satz die ihm zugehörige Benennung schreibe, indem sich dieses bei einiger Uebung leicht von selbst unterscheiden läßt. — Die Mathematik verdankt die Evidenz ihrer Lehren dieser streng wissenschaftlichen Methode und der Art ihres Gegenstandes, dessen Erkenntniß nicht auf der Erfahrung beruht, sondern in der Natur unsers Verstandes gegründet ist, und daher auch die Durchführung jener Methode möglich macht.

§. 9.

Mathematische Zeichen.

1. Das Zeichen der Gleichheit ist (=) z. B. A=C heißt A ist gleich (ist eben so groß als) C.
2. Die Ungleichheit drückt das Zeichen < so aus, daß die Spitze auf die kleinere Größe, die Oeffnung aber auf die größere hinweiset, z. B. A<C heißt A ist kleiner als C, und C ist größer als A.
3. Das Zeichen ∽ drückt die Aehnlichkeit aus, z. B. A∽B. Die Größe A ist der Größe B ähnlich.
4. Das Zeichen der Kongruenz ist $\overline{\backsim}$; also A $\overline{\backsim}$ B heißt: die Größen A und B sind einander gleich und ähnlich, d. i. kongruent.
5. Das Unendlichgroße wird durch ∞, das Unendlichkleine durch $\frac{1}{\infty}$ bezeichnet.
6. Das Zeichen dessen, was keine Größe hat, ist 0.

* Die besondern Zeichen jeder Rechnungsart später!

§. 10.

Grundsätze oder Axiome der Mathematik.

1. Jede Größe ist sich selbst gleich, oder $A = A$.
2. Das Ganze ist seinen Theilen zusammengenommen gleich.
3. Das Ganze ist größer, als ein, oder nur einige seiner Theile.
4. Wenn man von einer Größe alle ihre Theile hinwegnimmt, verschwindet sie (hebt sich auf, wird zu Nichts).
5. Zwei Größen, deren jede der nämlichen dritten gleich ist, sind auch unter sich gleich, d. i. wenn $A = B$, und $A = C$; so ist auch $B = C$.
6. Was größer ist, als eine von zwei gleichen Größen, das ist auch größer, als die andere, d. i. wenn $A > B$ und $B = C$, so ist auch $A > C$.
7. Was kleiner ist, als eine von zwei gleichen Größen, das ist auch kleiner, als die andere, d. i. wenn $A < B$ und $B = C$, so ist auch $A < C$.
8. Was größer ist, als die größere von zwei ungleichen Größen, das ist auch größer, als die andere, d. i. wenn $A < B$ und $B < C$, so ist auch $C > A$.
9. Was kleiner ist, als die kleinere von zwei ungleichen Größen, das ist auch kleiner, als die größere, d. i. wenn $A < B$ und $B < C$, so ist auch $A < C$.
10. Gleiches auf gleiche Art verändert, gibt wieder Gleiches; hingegen Gleiches auf ungleiche Art, oder Ungleiches auf gleiche Art verändert, gibt Ungleiches.
11. Kongruente Dinge sind vollkommen einerlei, und lassen sich daher substituiren.
12. Gleiche Größen lassen sich in Rücksicht ihrer Gleichheit, so wie ähnliche in Rücksicht ihrer Aehnlichkeit für einander setzen.

Erste Abtheilung.

Allgemeine Größenlehre.

Elementar = oder niedere Arithmetik.

§. 11.

Die Ordnung, in welcher die Gegenstände dieser Abtheilung behandelt werden, ist folgende:

Der erste Abschnitt enthält, außer den Vorbegriffen von den verschiedenen Größen und ihrer Bezeichnung,

I. die Stammrechnungsarten mit ganzen Buchstabengrößen

II. die Lehre von den Fraktionen, und

III. von der Verbindung der Größen überhaupt.

Der zweite Abschnitt hat zum Gegenstande die Lehre von den Potenzen und Wurzeln

I. Monomischer —

II. Binomischer und polynomischer Größen.

Jeder Abschnitt zerfällt in mehrere Hauptstücke, und jedes Hauptstück in mehrere Artikel.

I. Abschnitt.

Vorbegriffe.

Von den verschiedenen Größen und ihrer Bezeichnung.

§. 12.

Erklärungen.

1. Die Quantität der Größen wird (§. 3. 7°) durch die Anzahl der darin enthaltenen Einheiten bestimmt. Ist diese Anzahl genau angegeben, so heißt man sie Zahlen, und bedient sich zu ihrer Bezeichnung der Ziffern. Ist aber die Anzahl der in den Größen enthaltenen Einheiten nicht bestimmt, so heißt man sie allgemeine Größen, und gebraucht zu ihrer Bezeichnung die Buchstaben des kleinern lateinischen (manchmal auch griechischen) Alphabets, und zwar

a) die Anfangsbuchstaben, wenn sie bekannte Größen;

b) die Endesbuchstaben, wenn sie unbekannte Größen bezeichnen sollen.

2. Hieraus ergibt sich die Ziffer- (auch schlechthin Zahlen-) Rechnung und die Buchstabenrechnung (calculus literalis).

Zusatz 1. Ein Buchstabe, als Zeichen einer Größe, einzeln gesetzt, ist formlos, hat an und für sich keinen bestimmten Werth. Mehrere Buchstaben, als Größen auf eine bestimmte Art verbunden, drücken nur die Form dieser Verbindung aus. Daher kann auch durch die Verbindung mehrerer Buchstabengrößen nichts ausgerechnet, sondern nur das Verfahren gefunden werden, nach welchem bei einem besondern Beispiele gerechnet werden müsse, um für eine gesuchte Größe einen bestimmten Werth zu finden.

Zusatz 2. In der Buchstabenrechnung kann einer allgemeinen Größe jeder Werth, von ganzen und gebrochnen Zahlen, von Gulden, Pfunden ꝛc. beigelegt werden. Doch pflegt bei der

nämlichen Rechnung ein und derselbe Buchstabe z. B. c nur einen und den nämlichen Werth zu haben, welchen man ihm einmal gegeben hat.

Zusatz 3. Um Sätze allgemein zu beweisen, und Aufgaben allgemein, d. i. alle ähnlichen Aufgaben durch eine Formel aufzulösen, sind allgemeine Symbole (als solche erscheinen dabei die Buchstaben) nothwendig. Um Rechnungen abzukürzen, und sehr verwickelte Verbindungen von Größen deutlich darzustellen, werden Buchstaben auch öfters bei bestimmten Zahlen mit Vortheil gebraucht.

§. 13.

Erklärung.

1. Wird die Größe A durch die Größe b so bestimmt, daß man diese mehrmal nehmen muß, um erstere zu erhalten, so heißt b die Einheit von A, und zwar die absolute Einheit von A, wenn sie nicht weiter zusammengesetzt angenommen wird; relative Einheit, wenn sie selbst wieder aus einer andern Größe c, diese mehrmal genommen, zusammengesetzt gedacht wird.

2. Eine Größe A, in wieferne sie als Inbegriff mehrerer Einheiten b betrachtet, also ein Ganzes wird, heißt eine ganze Zahl. In wieferne sie aber selbst nur einen oder mehrere Theile einer andern Größe c, mithin nicht das Ganze enthält, eine gebrochene Zahl, Bruch, Fraktion.

Zusatz. Relative Einheiten sind in Rücksicht der niedrigeren Einheiten ganze Zahlen, in Rücksicht der höheren Einheiten gebrochene Zahlen.

I. Hauptstück.

Von den Rechnungsarten überhaupt, und mit ganzen Größen insbesondere.

---

§. 14.

Die einfachste Verbindungsart von Größen findet bei den sogenannten vier Rechnungsarten (species arithmeticae), näm-

lich der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division Statt. Man nennt sie auch Stammrechnungsarten, weil sich darauf am Ende alle arithmetischen Operationen zurückführen lassen.

Willkührlicher Satz.

Das Zeichen der Addition ist + (plus, und)
" " " der Subtraktion ist — (minus, weniger)
" " " der Multiplikation ist . oder × (mal)
" " " der Division ist : oder ein Strichlein, das zwischen Dividend und Divisor horizontal gezogen wird $(\frac{a}{b})$.

Die Einschließungszeichen ( ) werden gebraucht, wenn zwei oder mehrere, zumal durch das Zeichen der Addition oder Subtraktion verbundene, Größen als ein Ganzes betrachtet und als solches mit andern Größen verbunden werden sollen. Wenn die Klammern aufgelöst, d. i. hinweggelassen werden sollen, so werden die eingeschlossenen Größen mit den außer den Klammern stehenden in die angezeigte Verbindung wirklich gebracht.

§. 15.

1. Das Resultat der Addition heißt man Summe, das der Subtraktion Differenz, der Multiplikation Produkt, der Division Quotient. a+b drückt also allgemein die Summe, a—b die Differenz, a.b oder a×b oder auch ab das Produkt, a:b oder $\frac{a}{b}$ den Quotienten zweier verschiedenen Größen aus.

2. Kommt die nämliche Größe öfters als zu addirende Größe (Summand) vor, so wird dieß durch eine jener Größe vorgesetzte Zahl bezeichnet, welche man Coeffizienten nennt. So drückt z. B. in 4a der Coeffizient 4 aus, daß die Größe a viermal als Summand stehe, oder 4a = a+a+a+a.

3. Kommt die nämliche Größe öfters als zu multiplizirende Größe (als Faktor) vor, so wird dieß durch eine über jene Größe zur Rechten mit kleinerem Schriftzeichen gesetzte Zahl bezeichnet, welche man Exponenten nennt. So drückt z. B. in a^3 der Exponent 3 aus, daß a dreimal als Faktor stehe, oder $a^3 = a.a.a.$

4. Kommen

4. Kommen verschiedene Größen in gleichen oder ähnlichen Verbindungen vor, so bezeichnet man sie häufig, um die Gleichförmigkeit anschaulicher zu machen, mit den nämlichen Buchstaben, und unterscheidet sie nur mit Strichlein, welche man in Form von Accenten darüber setzt z. B. a′, a″ ꝛc., oder durch Zahlen, welche man ihnen unten am Ende mit kleinerer Schrift anhängt, und Zeiger (indices) heißt. Soll z. B. ausgedrückt werden, daß x öfters, aber mit verschiedenen Koeffizienten verbunden, vorkomme, so können diese dadurch unterschieden werden, daß man für den ersten a_1, für den zweiten a_2, für den dritten a_3 u. s. w. setzt.

Anmerkung. Bevor wir zu den Rechnungsarten schreiten, muß die wichtige Lehre von negativen und positiven Größen vorausgeschickt werden.

Erster Artikel.

Lehre von den entgegengesetzten Größen.

---

§. 16.

Erklärungen.

Größen, welche sich bei ihrer Verbindung mit einander vermehren, heißen übereinstimmend; Größen aber, welche sich bei ihrer Verbindung vermindern, d. i. zum Theil oder ganz aufheben, heißen entgegengesetzt. Solche entgegengesetzte Größen sind z. B. Schulden und Vermögen, das Vorwärts- und Rückwärtsgehen, Steigen und Fallen.

Folgesätze.

I. Entgegengesetzte Größen müssen an sich, und außer ihrer Entgegensetzung betrachtet, gleichartige Größen seyn; z. B. Schulden und Vermögen beziehen sich beide auf eine Summe Geldes. Eine von diesen entgegengesetzten Größen, welche man will, nennt man positiv oder bejahend; die andere heißt dann in Beziehung auf die erstere negativ oder verneinend. Wenn z. B. der Aufgang der Sonne positiv ist, so ist der Niedergang negativ. Wenn das in ein Gefäß einfließende Wasser für positiv gilt, so muß das ausfließende Wasser für negativ gelten, und umgekehrt.

II. Negative Größen heißen oft bei Mathematikern Größen, welche weniger als Nichts bedeuten. Dieses ist so zu verstehen: Jede negative Größe ist zwar mehr als Nichts, weil sie eine wirkliche Größe ist. Aber wenn man zu einer positiven Größe eine ihr gleiche negative setzt, so heben beide einander — dem Begriff zu Folge — auf, und geben Null (0). Z. B. Wer 12 fl. Schulden hat, und 12 fl. Vermögen bekommt, mit denen er seine Schuld abzahlt, der hat alsdann Nichts. Zuvor also, da er die Schulden allein hatte, konnte man von ihm sagen, daß er weniger als Nichts gehabt habe, weil er jetzt erst Nichts hat, nachdem er 12 fl. bekommen. — Eine negative Größe ist also weniger als Nichts in Beziehung auf die ihr entgegengesetzte Größe und die daraus entstehende Nulle —0—. Wollte man dieses Null —0— als ein absolutes Nichts betrachten, so wäre der Ausdruck, wenn man negative Größen weniger als Nichts nennt, falsch.

Willkührlicher Satz. Die positiven Größen bezeichnet man mit plus (+), welches am Anfange bei jeder Größe, die kein anderes Zeichen hat, verstanden wird, z. B. +Q, oder Q.

Die Negativen mit minus (—) z. B. —q.

Anmerkung. In der Geometrie (bei räumlichen Größen) drücken plus und minus eine entgegengesetzte Lage der Größen in Beziehung auf einen gewissen Anfangspunkt u. s. w. aus.

§. 17.

Sätze.

I. Gleiche entgegengesetzte Größen heben sich einander auf, d. i. werden = 0,

z. B. 12 fl. Schulden + 12 fl. Vermög. = 0.

oder + 12 — 12 = 0.

allgemein: + Q — Q = 0.

II. Ungleiche entgegengesetzte Größen miteinander verbunden lassen so viel übrig, als der Ueberschuß der größern über die kleinere Größe beträgt.

+ 12 — 15 = — 3.

+ 12 — 8 = + 4.

III. Entgegengesetzte Größen addiren ist daher eben so viel, als eine der kleinern gleiche, mit der größern übereinstimmige Größe, von letzterer subtrahiren,

z. B. 12 fl. Vermög. + 8 fl. Schuld. = 4 fl. Vermög.
oder 12 fl. Vermög. — 8 fl. Vermög. = 4 fl. Vermög.

*Der Beweis ergibt sich aus dem Begriffe von entgegengesetzten Größen.

IV. Umgekehrt, von einer Größe eine andere kleinere subtrahiren ist eben so viel, als zur ersten das gleiche Gegentheil der zweiten addiren,

z. B. 12 fl. Verm. — 10 fl. Verm. = 12 fl. Verm. + 10 fl. Schuld.

12 fl. Schuld. — 10 fl. Verm. = 12 fl. Schuld. + 10 fl. Schuld.

V. Von zwei entgegengesetzten Größen kann man die Positive mit (+) als die zu addirende, die Negative aber mit dem Zeichen (—) als die zu subtrahirende ansehen, und als entgegengesetzte Größen in der Rechnung wirklich behandeln.

Folgesatz. Die positiven Zahlen entstehen, wenn man zu 0 immer 1 hinzuzählt, indem die der Arithmetik zu Grunde liegende Eins immer positiv genommen wird; dieß gibt dann die Reihe der sogenannten natürlichen Zahlen:

0, + 1, + 2, + 3, + 4, + 5, + 6, + 7, + 8 ꝛc. u. s. f.

In einer negativen Zahl ist jene Eins (die Grundeinheit) nicht selbst enthalten, sondern deren Gegentheil.

Anmerkung. Eine Reihe von mehreren, durch das Zeichen + oder — verbundenen, Größen heißt man eine zusammengesetzte, komplexe Größe, die einzelnen Größen Glieder. Nach der Anzahl der Glieder unterscheidet man monomische, binomische, trinomische ꝛc. überhaupt polynomische Größen, wenn nur 1 Größe gegeben ist, oder 2, 3 oder mehrere Größen durch + oder — verbunden sind. — Ist das erste Glied positiv, so läßt man das Zeichen + hinweg.

Zweiter Artikel.

Addition.

§. 18.

I. Addiren heißt eine Größe finden, welche mehreren zusammengenommen gleich ist. Letztere — die schon gegebenen bekannten Größen — heißt man Summanden oder Posten; die zu findende unbekannte Größe heißt die Summe.

II. Es lassen sich nur gleichartige Größen addiren, d. i. geben in der Summe ein Ganzes (eine einzige Größe).. (§. 3. 2°).

III. In der Buchstabenrechnung sind nur die mit gleichen Buchstaben und Exponenten bezeichneten Größen gleichartig, z. B. a, a; b, b; $3a^2$, $4a^2$; auf die Koeffizienten kommt es dabei nicht an. Die mit verschiedenen Buchstaben, oder auch gleichen Buchstaben, aber verschiedenen Exponenten bezeichneten Größen sind ungleichartig z. B. a, b, c; a^2 und a^3.

IV. Gleichartige Buchstabengrößen werden addirt, wenn man ihre Koeffizienten zusammenzählt, und die Summe vor die Buchstabengröße hinsetzt. Der Buchstabe selbst und der Exponent bleiben unverändert, indem sie nur die Gleichartigkeit ausdrücken helfen. Da ist zu merken, daß man den Koeffizienten 1 allezeit schon versteht, wiewohl er nicht ausdrücklich ausgesetzt ist.

$$\text{Also } 3b + 8b = 11b$$
$$7a + a + 5a = 13a.$$
$$5a^2 + 3a^2 = 8a^2$$

V. Ungleichartige Größen kann man nicht wirklich summiren, sondern man begnügt sich, die Addition bloß anzuzeigen, welches manchmal nur dadurch geschieht, daß man die in Klammern eingeschlossenen Summanden nach alphabetischer Ordnung hinsetzt, und die Einschließung hinwegläßt.

$$\text{Z. B. } (a+c+d)+(b+g+f) = a+b+c+d+f+g.$$

VI. Sind gleichartige, aber entgegengesetzte Größen (mit + und —) zu addiren, so betrachtet man die negative als eine

abzuziehende positive (§. 17. II.), und zieht die Koeffizienten von einander ab, und behält das Zeichen des Größern bei;

z. B. $5a - 3a = +2a$ | $18 - 14 = 4$
$-6b + 5b = -b$ | $19 - 28 = -9$.

VII. Gleichartige negative Größen werden ebenfalls addirt, und ihrer Summe das Zeichen der Negation vorgesetzt:

z. B. $-13a - 4a - 7a = -24a$.

13 fl. Schuld. + 4 fl. Sch. + 7 fl. Sch. = 24 fl. Schuld.

*Beweis: Gleichartige, übereinstimmige Größen geben als Theile ein Ganzes von einerlei Beschaffenheit, d. i. eine Summe, und das Ganze erhält das Zeichen seiner Theile.

VIII. Kommen mehrere gleichartige Glieder mit + und mit — vor, so addirt man sowohl die ersten als die zweiten in eine besondere Summe, und verfährt dann wie Nro. V und VI gesagt worden.

z. B. $3a - 4b + 7a - 3b + 15 - 4 = 10a - 7b + 11$.

$28 - 4 - 7 - 12 = 28 - 23 = 5$.

IX. Die Summe stellt bei der Addition das Ganze, die Summanden dessen Theile vor. Folglich ist die Addition nur dann gehörig verrichtet worden, wenn die Summe nicht mehr und nicht weniger enthält als alle Summanden zusammengerechnet. Daher kann man jede Addition dadurch prüfen,

1. daß man die einzelnen Summanden von der Summe abzieht, worauf die Summe zu 0 werden muß, oder
2. daß man alle Posten bis auf einen von der Summe hinwegnimmt, welches dann den übriggelassenen als Rest gibt.

§. 19.

Da es bei der Addition nicht darauf ankommt, in welcher Ordnung die einzelnen Summanden addirt, als Theile zu einem Ganzen verbunden werden, so setzt man gewöhnlich bei der Addition zusammengesetzter Größen die gleichartigen Glieder neben oder unter einander, so daß sie auch nach der Größe ihrer Exponenten, von dem höchsten zum niedrigsten, auf einander folgen.

Beispiele.

I. $(a+b) + (a-b)$

II. $(ab - cd) + (4ab - 4cd)$

III. $(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)+(x^3-3x^2y-3xy^2-y^3)$
IV. $(a^2+2ab-b^2)+(2b^2+5ab)+(-a^2-3ab+b^3)+(-8ab+a^3)$
V. $(a^3+5a^2b-28)+(a^3-5a^2b+39)$
VI. $(c^3+3c^2d+f-20)+(c^2-3cd^2-f^2)$.

§. 20.

Auflösung obiger Beispiele.

I. $\begin{array}{r} a+b \\ \underline{a-b} \\ 2a \end{array}$

Anmerkung. Wenn man also zur Summe zweier Zahlen ihre Differenz addirt, so erscheint das Doppelte der größern Zahl. Es sey $a=8$, $b=7$; so ist $(8+7)+(8-7)=16=2\times 8$.

II. $\begin{array}{r} ab-cd \\ \underline{3ab-4cd} \\ 4ab-5cd \end{array}$

III. $\begin{array}{r} x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 \\ \underline{x^3-3x^2y-3xy^2-y^3} \\ 2x^3 \end{array}$

IV. $\begin{array}{r} a^2+2ab-b^2 \\ +5ab+2b^2 \\ \underline{-a^2-3ab+b^3} \\ a^3-8ab \\ \underline{a^3-4ab+b^2+b^3} \end{array}$

V. $\begin{array}{r} a^3+3a^2b-28 \\ \underline{a^3-5a^2b+39} \\ 2a^3-2a^2b+11 \end{array}$

VI. $(c^3+3c^2d+f-20)+(c^2-3cd^2-f^2)=$
$c^3+c^2+3c^2d-3cd^2-f^2+f-20$.

Anmerkung. Es hat in der Mathematik einen großen Nutzen, allgemeine Größen in bestimmte Zahlengrößen aufzulösen; deßwegen folgen hier, und so auch am Ende einer jeden andern Rechnungsart einige Beispiele der Art.

Es sey im Vten Beispiele $a=3$, $b=2$, $c=1$. Setzt man diese Werthe statt der Buchstaben in jener Aufgabe, so ist

$a^3+3a^2b-28=27+54-28=53$
$a^3-5a^2b+39=27-90+39=-24$
$2a^3-2a^2b+11=54-36+11=29$

Es sey im VIten Beispiele $c=5$, $d=3$, $f=1$, so ist

$c^3+3c^2d+f-20=125+225+1-20=331$
$c^2-3cd^2-f^2=25-135-1=111$
$(c^3+3c^2d+f-20)+(c^2-3cd^2-f^2)=220$.

Dritter Artikel.

Subtraktion.

§. 21.

I. Von einer Größe M eine andere S subtrahiren heißt, eine dritte Größe D finden, welche den Unterschied von jenen beiden beträgt, oder eine Größe D = Differenz, Rest — finden, welche zur zweiten — zum Subtrahend S — addirt, die erste — das Minuend M — als Summe gibt. Soll M − S = D seyn, so muß S + D = M seyn.

II. Minuend und Subtrahend müssen daher, wenn die Subtraktion nicht bloß angezeigt, sondern wirklich vorgenommen werden soll, gleichartig seyn; auch die Subtraktion kann sich, wie die Addition, selbst bei gleichartigen Buchstabengrößen, zunächst nur auf die Koeffizienten beziehen. (§. 18. IV.)

III. Sind Minuend und Subtrahend übereinstimmende Größen, und jenes größer als dieses, so muß die Differenz mit dem Subtrahend übereinstimmend seyn, und wird erhalten, wenn man den Koeffizienten des Subtrahends von dem des Minuends wie andere Zahlen abzieht. Z. B. Von −9a das −5a subtrahirt, gibt −4a zum Reste, weil −4a mit −5a die Summe −9a gibt; oder $-9a-(-5a) = -9a+5a = -4a$.

IV. Ist das Subtrahend zwar übereinstimmend mit dem Minuend, aber größer als dieses, so muß der Ueberschuß des erstern getilgt werden; folglich muß die Differenz eine dem Subtrahend entgegengesetzte Größe seyn, und wird erhalten, wenn man vom Koeffizienten des Subtrahends den des Minuends abzieht. Z. B. $+5a-(+8a) = -3a$, weil $+8a+(-3a)$ auch $= +5a$; oder $+5a-(+8a) = +5a-3a = -3a$.

V. Sind Minuend und Subtrahend entgegengesetzte Größen, so muß die Differenz eine dem Subtrahend entgegengesetzte Größe seyn, und so viel betragen, als jene beiden, weil das Subtrahend völlig getilgt werden, und noch so viel als Ueberschuß bleiben muß, als das Minuend beträgt; die Differenz wird also erhalten, wenn man die Koeffizienten zusammenzählt, und der Summe das Zeichen des Minuends gibt. Z. B. $+3d-(-9d)$

$= +12d$, weil $+12d + (-9d) = +3d$; oder $+3d - (-9d)$ $= +3d + 9d = +12d$.

VI. Ist das Minuend $= 0$, so muß die Differenz, damit sie mit dem Subtrahend zur Summe 0 gibt, dem Subtrahend gleich und entgegengesetzt seyn. Z. B. $0 - (-3a) = +3a$, weil $-3a + (+3a) = 0$.

Aus III. — VI. ergibt sich für die Subtraktion die Regel:

Man verändere im Subtrahend das Zeichen, und addire dann jenes zum Minuend.

§. 22.

Anmerkungen.

1) In V. des §. 21 finden Anfänger häufig Schwierigkeit für die spezielle Regel: Von einer positiven Größe eine negative hinwegnehmen, sey so viel, als zur erstern die zweite positiv hinzuzählen. Zur Erläuterung diene folgendes Beispiel.

Es habe A 12 fl. Vermögen, B aber 10 fl. Schulden, welches wird nun die Differenz ihres beiderseitigen Vermögens seyn, oder um wie viele Gulden wird A mehr haben als B? — Antwort: um 22 fl. hat A mehr als B, und B weniger als A. Denn hätte B bei 10 fl. Schulden auch wirklich 10 fl. Vermögen, so würde er doch an sich Nichts — weder Vermögen noch Schulden — haben, folglich noch 12 fl. bedürftig seyn, um dem A zu gleichen. — Eben so, wenn A die 12 fl. seines Vermögens hingäbe, würde er doch noch um 10 fl. reicher seyn, als B, weil dieser 10 fl. Schulden hat, jener keine.

2) Allgemein läßt sich der am Ende des §. 21 aufgestellte Satz auch so beweisen:

Man habe von der Größe A abzuziehen, einmal die Größe $+b$; und dann die Größe $-b$.

Um die Subtraktion wirklich verrichten zu können, kann ich die Größe A erst vorbereiten, indem ich ihr ein Aequivalent von Null (0) anhänge, wodurch ihr Werth nicht verändert wird, z. B. $b - b = 0$

Folglich $A = A + b - b$.

Ziehe ich nun von A die Größe +b ab, d. i. nehme ich +b hinweg, so sieht man, daß noch A—b bleibe. Nimmt man aber die andere Größe, —b, hinweg, so ist evident, daß noch restire: A+b.

Also $A = A + b - b$

$$\underline{-(+b) = -(+b)}$$

$$A-(+b) = A-b$$

und $A = A + b - b$

$$\underline{-(-b) = \quad -(-b)}$$

$$A-(-b) = A+b.$$

§. 23.

Soll eine zusammengesetzte Größe von einer andern subtrahirt werden, so geschieht dieß dadurch, daß man die Glieder des Subtrahends von den gleichartigen Gliedern des Minuends einzeln nach den oben gegebenen Regeln subtrahirt, daß man nämlich in allen Gliedern des Subtrahends die Zeichen ändert und addirt.

Uebereinstimmend mit dieser Regel ist folgende:

Steht vor einem in Klammern eingeschlossenen Polynomium das Zeichen —, so muß bei Auflösung der Klammern jedes Zeichen in das entgegengesetzte verwandelt werden. Z. B. $5a-(2b+3c-5) = 5a-2b-3c+5$. In gleicher Art sollen mehrere Größen in Klammern eingeschlossen, und soll vor diese das Zeichen — gesetzt werden; so ändere man bei den einzuschließenden Größen durchaus die Zeichen. Z. B. $3a-4b+3c-6 = 3a-(4b-3c+6)$.

Anmerkungen.

1. Die Addition und Subtraktion dienen sich gegenseitig zur Probe, da erstere gegebene Theile in eine Summe vereinigt, letztere eine Summe in Theile trennt.
2. Um die Addition zu prüfen, zieht man das eine der beiden Summanden von der Summe ab, worauf das andere als Rest erscheint.
3. Um die Subtraktion zu prüfen, addirt man den Rest zu dem Subtrahend (mit unveränderten Zeichen). Die Summe gibt das Minuend wieder.

§. 24.

Beispiele der Subtraktion.

I. $(a+b)-(a-b)$.

II. $(4ab-3bc)-(2ab-bc)$.

III. $(x^3+2x^2y+xy^2+y^3)-(x^3-x^2y-2xy^2-y^3)$.

IV. $(a^2+2ab)-(c^2-5ab+3)$.

V. $(a^3+6a^2b^2-8)-(-a^3+100a^2b^2+25)$.

VI. $(d^2+2f^3-g+28)-(f^2+g^2-20)$.

Auflösung.

I.
$$\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ -\quad + \\ \hline 2b \end{array}$$

Probe.
$$\begin{array}{r} a-b \\ +2b \\ \hline a+b. \end{array}$$

Anmerkung. Wenn man also von der Summe zweier Größen ihre Differenz abzieht, so erscheint das Doppelte der kleinern Größe.

Es sey $a=8$, $b=7$.

$8+7=15$
$8-7=1$

$15-1=14=2\times 7$.

II.
$$\begin{array}{r} 4ab-3bc \\ 2ab-\ bc \\ -\quad + \\ \hline 2ab-2bc. \end{array}$$

Probe.
$$\begin{array}{r} 2ab-bc \\ 2ab-2bc \\ \hline 4ab-3bc. \end{array}$$

III.
$$\begin{array}{r} x^3+2x^2y+xy^2+y^3 \\ x^3-x^2y-2xy^2-y^3 \\ -\quad +\quad +\quad + \\ \hline 3x^2y+3xy^2+2y^3. \end{array}$$

Probe.
$$\begin{array}{r} x^3-x^2y-2xy^2-y^3 \\ 3x^2y+3xy^2+2y^3 \\ \hline x^3+2x^2y+xy^2+y^3. \end{array}$$

IV.
$$\begin{array}{r} a^2+2ab \\ c^2-5ab+3 \\ -\quad +\quad - \\ \hline a^2+7ab-c^2-3. \end{array}$$

* Die Proben zur Uebung!

V.
$$\begin{array}{r} a^3+6a^2b^2-8 \\ -a^3+100a^2b^2+25 \\ +\quad -\quad\quad - \\ \hline 2a^3-94a^2b^2-33. \end{array}$$

VI.
$$\begin{array}{r} d^2+2f^3-g+28 \\ f^2+g^2-20 \\ -\quad -\quad + \\ \hline d^2+2f^3-f^2-g^2-g+48. \end{array}$$

Anmerkung. Wie die Addition durch die Subtraktion geprüft werde, zeigt folgendes Beispiel:

$$(a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 2ab + b^2).$$

Es sey $a = 4$, $b = 3$.

Operation.

$$\begin{array}{rcrcr} a^2 + 2ab + b^2 & = & 16 + 24 + 9 & = & 49 \\ a^2 - 2ab + b^2 & = & 16 - 24 + 9 & = & 1 \\ \hline 2a^2 \quad + 2b^2 & = & 32 \quad + 18 & = & 50 \end{array}$$

Probe. 1)

$$\begin{array}{rcl} 2a^2 + 2b^2 & = & 50 \\ -(a^2 + 2ab + b^2) & = & 49 \\ (- \quad - \quad -) & & - \\ \hline a^2 - 2ab + b^2 & = & 1 \end{array}$$

oder 2)

$$\begin{array}{rcl} 2a^2 + 2b^2 & = & 50 \\ -(a^2 - 2ab + b^2) & = & 1 \\ (- \quad + \quad -) & & - \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 & = & 49 \end{array}$$

§. 25.

Aus: $(a - b) + c = a + c - b = a - (b - c)$ ergibt sich der Satz: Man addirt zur Differenz zweier Größen eine dritte, wenn man diese entweder zum Minuend addirt, oder vom Subtrahend subtrahirt.

$(a - b) - c = (a - c) - b = a - (b + c)$ heißt: Von der Differenz zweier Größen wird eine dritte subtrahirt, wenn man diese entweder vom Minuend subtrahirt, oder zum Subtrahend addirt.

In gleicher Art entwickle man, und drücke in Worten aus: $a - (b + c)$, $a - (b - c)$, $(a - b) - (c - d)$ u. s. w.

§. 26.

Anwendung des zehnten Grundsatzes (§. 10. II.) auf die Addition und Subtraktion.

I. Gleiches zu Gleichem addirt oder von Gleichem subtrahirt, gibt gleiche Summen, gleiche Reste.

Z. B. wenn $\begin{cases} a = b \\ c = d \end{cases}$ so ist $\begin{array}{l} a + c = b + d \\ a - c = b - d. \end{array}$

II. Zu Gleichem Ungleiches oder zu Ungleichem Gleiches addirt, gibt Ungleiches ... Und zwar, wo das Größere hinzukommt, ist die Summe größer, und beim Kleinern kleiner.

Z. B. $b > c$ Das Nämliche gilt, mit den nöthigen analogen Veränderungen, von der

$$\frac{a = a}{a + b > a + c}$$

Subtraktion ... Vgl. §. 25.

Vierter Artikel.

Multiplikation.

§. 27.

Erklärungen.

I. Multipliziren heißt eine Größe M so und so oft nehmen, als die Einheit in der andern m enthalten ist; die gegebenen zwei Größen nennt man die Faktoren, und zwar die Größe M das Multiplikand, den andern Faktor m den Multiplikator, und die durch die Multiplikation hervorgebrachte Größe (P) das Produkt.

Z. B. $M \times m = P$. oder $M . m = P$.

$6 . 3 = 6 \times 3 = 18$.

II. In der Buchstabenrechnung werden die Faktoren ohne Zeichen, nach alphabetischer Ordnung, zusammengestellt.

Z. B. $a \times b = ab$

$a \times b \times c \times d \times f = a\,b\,c\,d\,f$.

III. Soll der nämliche Buchstabe zwei, dreimal oder öfters mit sich selbst multiplizirt werden; so schreibt man ihn ebenfalls nach einander, so oft er als Faktor gegeben ist, oder schreibt ihn nur einmal mit dem Exponenten. Vgl. §. 15.

$a \times a = a\,a = a^2$

$a \times a \times a = a\,a\,a = a^3$

$a \times a \times a \times a = a\,a\,a\,a = a^4$

Anmerkung. 1. Ein solches Produkt aus lauter gleichen Faktoren heißt eine Würde (Dignitas, Potentia, Potestas), und zwar die zweite, dritte, vierte, fünfte Würde, je nachdem das Produkt aus 2, 3, 4, 5 gleichen Faktoren besteht. Im uneigentlichen Sinne kann man jede Größe als eine Potenz mit dem Exponenten 1 (oder des ersten Grades) betrachten, z. B. $a = a^1$ u. s. w.

2. Kürzer werden also Potenzen mit gleichen Buchstaben multiplizirt, wenn man ihre Exponenten addirt, und die Summe der Exponenten über den Buchstaben schreibt, z. B. $a^2 \times a = a^3$ oder $a^2 \times a = a\,a\,a = a^3$.

IV. Wenn man eine Buchstabengröße durch eine bloße Zahl zu multipliziren hat, so schreibt man die Zahl als den Koeffizienten der Buchstabengröße voraus; denn mit einer Zahl multipliziren heißt das Multiplikand so oft nehmen, als der Multiplikator (die Zahl) Einheiten enthält. Z. B.

$$m \times 3 = m + m + m = 3\,m.$$
$$ab \times 5 = 5\,ab.$$

V. Soll aber ein Faktor, dem schon ein Koeffizient vorausgesetzt ist, durch eine bloße Zahl multiplizirt werden, so kann man diese entweder dem Koeffizienten mit dem Multiplikationszeichen vorsetzen, oder (was gewöhnlicher ist) die Multiplikation wirklich verrichten. Z. B.

$$6b \times 3 = 6b + 6b + 6b = 3.\,6b = 18b.$$

VI. In Fällen, wo diese verschiedenen Regeln auf einmal zusammentreffen, oder wenn mehrere Faktoren gegeben sind, müssen sie auch alle zugleich angewendet werden. Z. B.

$$2a \times 3ab = 6aab = 6a^2b.$$
$$3c \times 4cd \times 5cdf = 60cccddf = 60c^3d^2f.$$

§. 28.

Bei der Multiplikation allgemeiner Größen hat man auch auf ihre Zeichen zu sehen; hiebei gelten folgende Grundsätze:

I. Ist der Multiplikator positiv, so ist die Einheit selbst in ihm enthalten; es muß also das Multiplikand selbst, mit seinem eignen Zeichen, so oft genommen werden, als der Multiplikator Einheiten enthält; — das Produkt erhält das Zeichen des Multiplikands. Vgl. §. 27. I. und §. 17. Folgesatz.

$$+4a \times +3 = +4a + 4a + 4a = +12a$$
$$-4a \times +3 = -4a - 4a - 4a = -12a$$

II. Ist der Multiplikator negativ, so ist die Einheit nicht selbst, sondern deren Gegentheil darin enthalten; daher muß das Gegentheil des Multiplikands so oft genommen werden, als der Multiplikator Einheiten enthält; — das Produkt erhält das entgegengesetzte Zeichen des Multiplikands.

$$+4a \times -3 = -4a - 4a - 4a = -12a$$
$$-4a \times -3 = +4a + 4a + 4a = +12a$$

Corollar. Gleiche Zeichen geben bei der Multiplikation Positives, ungleiche Zeichen aber Negatives.

Signa eadem dant Plus, signa diversa Minus.

Z. B. $3ab \times 4ac = 12a^2bc$

$15f \times -3g = -45fg.$

$-19d \times -2dg = +38d^2g.$

§. 29.

I. Eine ganze Zahl (z. B. 7) durch eine andere (z. B. 3) multipliziren, heißt die eine so oft zu sich selbst addiren, als die andere Einheiten hat. $7 \times 3 = 7 + 7 + 7 = 21.$

oder $7 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 21.$

1. Wenn nun zwei ganze Zahlen so mit einander multiplizirt wurden, so steckt der eine Faktor so oft in dem Produkte, als die Einheit in dem andern Faktor, z. B. wenn man obiges Produkt mit Punkten oder Sternchen ausdrückt:

* * * * * * *
* * * * * * *
* * * * * * *

so sieht man, daß in dem Produkte die Zahl 7 — dreimal, so viel die Zahl 3 Einheiten hat; hingegen der Faktor 3 darin 7 mal enthalten ist, indem 7 aus sieben Einheiten besteht. Mit andern Worten: in 21 steckt 7 so oftmal, als 1 in 3, und 3 in 21 so oftmal, als 1 in 7. — Das in Beziehung auf die Faktoren 7 und 3 Nachgewiesene gilt allgemein. Im Produkte am ist der Faktor a....m mal und m....a mal enthalten.

2. Es ist einerlei, welcher von zwei Faktoren als Multiplikand oder Multiplikator betrachtet werde; denn

$$3 \times 4 = 12$$
$$4 \times 3 = 12$$

und allgemein $b \times \beta = \beta \times b.$

3. Eine Zahl mit 0 multipliziren, heißt die Zahl kein Mal nehmen, z. B. $3 \times 0 = 0.$ $a \times 0 = 0.$

4. Eine Zahl mit 1 multipliziren, heißt sie einmal setzen, oder unverändert lassen, z. B. $a \times 1 = a.$

* Es läßt sich also jede Größe betrachten als ein Produkt aus sich selbst und 1. Z. B. $ab = 1 \times ab.$

II. Sind mehr als zwei Faktoren durcheinander zu multiplizíren, so sucht man zuerst das Produkt von zweien, und multiplizirt das erste Produkt durch den dritten, vierten ꝛc. Faktor.

Z. B. $3a \times 4b \times 5c = 12ab \times 5c = 60abc.$ —

Ein Produkt von mehreren Faktoren wird durch einen neuen Faktor multiplizirt, wenn man mit diesem einen von jenen Faktoren, beliebig welchen, multiplizirt, indem dadurch der neue Faktor immer auch als Faktor des Gesammtproduktes erscheint.

Z. B. $(3.5.6) \times 7 = 21.5.6 = 3.35.6 = 3.5.42 = 630.$

$4a(3a.4b.3c) = 12a^2.4b.3c = 3a.16ab.3c = 3a.4b.12ac$
$= 48a^2bc \times 3 = 144a^2bc.$

§. 30.

I. Ist ein mehrgliedriges Multiplikand durch einen eintheiligen Multiplikator zu multiplizíren, so multiplizire man jedes Glied des Multiplikands mit dem Multiplikator, und addire die Partialprodukte, indem offenbar ein aus mehrern Theilen bestehendes Ganze dadurch multiplizirt wird, wenn man es in seinen Theilen einzeln multiplizirt. Z. B.

$$(a+b-c) \times d = ad + bd - cd.$$

II. Ist ein eintheiliges Multiplikand durch einen mehrtheiligen Multiplikator zu multiplizíren, so wird es durch jedes Glied des Multiplikators einzeln multiplizirt; das Gesammtprodukt ist dann die Summe der Partialprodukte. Z. B.

$d \times (a+b-c) = ad + bd - cd$, weil $d \times (a+b-c) = (a+b-c) \times d$. (§. 29. I.)

III. Sind die beiden Faktoren mehrtheilige Größen, so wird mit jedem Gliede des einen Faktors jedes Glied des andern einzeln multiplizirt (gewöhnlich von der Linken zur Rechten), und dann werden die einzelnen Theilprodukte addirt. Soll z. B. $(a+b-c)$ mit $(d-e+f)$ multiplizirt werden, so setze man den zweiten Faktor $= A$, so wird

$(a+b-c) \times (d-e+f) = (a+b-c) \times A = aA + bA - cA$ (I.)
$= a.(d-e+f) + b.(d-e+f) - c.(d-e+f) =$
$ad - ae + af + bd - be + bf - cd + ce + cf.$ (II.)

§. 31.

Beispiele der Multiplikation.

I. $(a+b) . (a-b)$.
II. $(2b-5) \times (3b-7)$.
III. $(x^2-2xy+y^2) \times (x+y)$.
IV. $(x^2+3x-7) \times (x+5)$.
V. $(m+n+p) \times (m-n-p)$.
VI. $(a+b . (a-b) . (a^2+ab+b^2) . (a^2-ab+b^2)$.

Anmerkung. Wenn die Multiplikation zweier oder mehrerer Formeln bloß angezeigt werden soll, wie hier, setzt man dieselben manchmal auch bloß mit ihren Klammern, ohne alles Multiplikationszeichen nacheinander.

Z. B. $(a+b)\ (a-b)\ ..$ oder $(3a-b)\,c$, wo c als Faktor sowohl zu 3a, als zu — b gehört.

§. 32.

Auflösung.

I.
$$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 + ab \\ \quad -ab - b^2 \\ \hline a^2 \qquad -b^2. \end{array}$$

Wenn man also die Differenz zweier Größen mit ihrer Summe multiplizirt, so gibt das Produkt die Differenz der Quadrate von diesen Zahlen; z. B. $(8+7) \times (8-7)$.

$$\begin{array}{r} 8 + 7 \\ 8 - 7 \\ \hline 64 + 56 \\ \quad - 56 - 49 \\ \hline 64 \qquad -49 = 15. \end{array}$$

II.
$$\begin{array}{r} 2b - 5 \\ 3b - 7 \\ \hline 6b^2 - 15b \\ \quad -14b + 35 \\ \hline 6b^2 - 29b + 35. \end{array}$$

Es sey $b = 6$; folglich
$(12-5) \times (18-7)$
$= 7 \times 11 = 77.$

III. x^2

III.
$$\begin{array}{l} x^2 - 2xy + y^2 \\ x + y \\ \hline x^3 - 2x^2y + xy^2 \\ \quad + x^2y - 2xy^2 + y^3 \\ \hline x^3 - x^2y - xy^2 + y^3. \end{array}$$

IV.
$$\begin{array}{l} x^2 + 3x - 7 \\ x + 5 \\ \hline x^3 + 3x^2 - 7x \\ \quad + 5x^2 + 15x - 35 \\ \hline x^3 + 8x^2 + 8x - 35. \end{array}$$

V.
$$\begin{array}{l} m + n + p \\ m - n - p \\ \hline m^2 + mn + mp \\ \quad - mn - n^2 - np \\ \qquad - mp - np - p^2 \\ \hline m^2 - n^2 - 2np - p^2. \end{array}$$

§. 33.

VI. Wenn mehr als zwei Formeln durcheinander zu multipliziren sind, wie in der Aufgabe VI., so muß das Produkt aus den zwei ersten auch noch durch die dritte, und das neue Produkt noch durch die vierte Formel multiplizirt werden, wobei es willkührlich ist, in welcher Ordnung man die Faktoren vornehmen wolle. Man kann auch das Produkt aus je zwei Formeln durch das Produkt aus den übrigen zweien multipliziren.

$$\begin{array}{l} a^2 + ab + b^2 \\ a + b \\ \hline a^3 + a^2b + ab^2 \\ \quad + a^2b + ab^2 + b^3 \\ \hline a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3. \end{array} \qquad \begin{array}{l} a^2 - ab + b^2 \\ a - b \\ \hline a^3 - a^2b + ab^2 \\ \quad - a^2b + ab^2 - b^3 \\ \hline a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3. \end{array}$$

Ferner:
$$\begin{array}{l} a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3 \\ \hline a^6 + 2a^5b + 2a^4b^2 + a^3b^3 \\ \quad - 2a^5b - 4a^4b^2 - 4a^3b^3 - 2a^2b^4 \\ \quad + 2a^4b^2 + 4a^3b^3 + 4a^2b^4 + 2ab^5 \\ \qquad - a^3b^3 - 2a^2b^4 - 2ab^5 - b^6 \\ \hline a^6 - b^6. \end{array}$$

Die übrigen Glieder heben sich alle auf.

Oder auch in folgender Ordnung:

$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$.

$(a^2+ab+b^2) \times (a^2-b^2) = a^4+a^3b-ab^3-b^4$.

$(a^4+a^3b-ab^3-b^4) \times (a^2-ab+b^2) = a^6-b^6$.

Anmerkung. Es sey in dem letzten Beispiele (Nro. VI.) $a = 8$, $b = 7$, so steht die ganze Multiplikation in Zahlen aufgelöset also:

$a + b = 8 + 7 = 15$.

$a - b = 8 - 7 = 1$.

$a^2 + ab + b^2 = 64 + 56 + 49 = 169$.

$a^2 - ab + b^2 = 64 - 56 + 49 = 113 - 56 = 57$.

Das Produkt aus diesen vier Faktoren ist:

$15 \times 1 \times 169 \times 57 = 144.495$.

Folglich $a^6 - b^6 = 144.495$.

Denn $a^6 = 8^6 = 262.144$.

$b^6 = 7^6 = 117.649$.

Die Differenz dieser Zahlen ist $262.144 - 117.649 = 144.495$.

Fünfter Artikel.

Division.

§. 34.

Erklärungen.

I. Eine Größe P (= Dq) durch eine zweite D dividiren heißt, eine dritte q finden, welche anzeigt, wie oft die eine in der andern enthalten ist, oder eine dritte Größe q finden, welche mit der zweiten D multiplizirt, die erste (P = Dq) wieder gibt.

II. Die Größe P, welche dividirt wird, heißt das Dividend, die Größe D, womit man dividirt, der Divisor, und die dritte gefundene Größe q der Quotient oder Quotus.

III. Die Division ist ganz der Gegensatz der Multiplikation: erstere vereinfacht und löset auf, was die zweite vervielfacht und vereinigt hat. Das Dividend stellt das Produkt vor, dessen Faktoren der Divisor (und zwar der bekannte) — und der Quotient sind (letzterer als unbekannter Faktor).

IV. Die Multiplikation und Division dienen sich also gegenseitig zur Probe.

§. 35.

Für die Division lassen sich aus den vorausgeschickten Begriffen folgende Sätze aufstellen:

I. Jede Zahl durch sich selbst dividirt gibt zum Quotus 1; denn jede Größe ist ein Produkt aus sich selbst und 1 (vergl. §. 29. 4°).

$$a : a = \frac{a}{a} = 1. \qquad bc : bc = 1. \qquad dfg : dfg = 1.$$

denn $1 \times a = a.$ $\qquad bc \times 1 = bc.$ $\qquad dfg \times 1 = dfg.$

Es kommt also nur darauf an, daß man die gleichen Faktoren des Dividens und des Divisors auffindet, und sie zu 1 macht, d. i. wenn noch ein Mitfaktor gegeben ist, ganz hinwegläßt, und den Mitfaktor als Quotus anschreibt. Z. B.

$$abf : af = \frac{af}{af} . b = b. \qquad \text{Denn } af \times b = abf.$$

Anmerkung. Dieser Satz gilt auch in dem Falle, wenn der Divisor und das Dividend $= 0$ sind.

$$\text{Also } \frac{a - a}{a - a} = \frac{0}{0} = 1.$$

II. Enthält das Dividend allein, oder der Divisor zugleich gleichartige Würdengrößen (gleiche Buchstaben, wiewohl mit verschiedenen Exponenten), so löse man sie so in zwei Faktoren auf, daß im Dividend und Divisor ein gleicher Faktor erscheint, wenn sie nicht ohnehin schon gleich sind, und verfahre wie bei Nro. I.

$$\text{z. B. } a^2b : a^2 = \frac{a^2b}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} b = b.$$

$$a^5bc : a^3c = \frac{a^5bc}{a^3c} = \frac{a^3 . a^2bc}{a^3 . \quad c} = a^2b.$$

Potenzen von einerlei Größen werden aber kürzer dadurch dividirt, daß man den Exponenten des Divisors von jenem des Dividends abzieht, und den Rest über die dividirte Größe als Exponent setzt. — Diese Subtraktion ist ebenfalls eine Addition mit verändertem Zeichen des Subtraktors. Z. B.

$$a^5 : a^3 = a^{5-3} = a^2 \qquad \text{Probe } a^2 \times a^3 = a^{2+3} = a^5.$$

III. Hat das Dividend und der Divisor überdieß noch Koeffizienten bei sich, so werden diese dividirt, weil sie bei der Multiplikation multiplizirt wurden. Z. B.

$18ab : 6b = \frac{18ab}{6\ b} = \frac{6.3ab}{6.\ b} = 3a$. Denn $3a \times 6b = 18ab$.

$27cd : 3d = 9c$. Denn $3d \times 9c = 27cd$.

$25a^5 : 5a^3 = 5a^{5-3} = 5a^2$. Denn $5a^2 \times 5a^3 = 25a^5$.

IV. Wenn die Faktoren des Dividends und Divisors ungleichartige Buchstaben sind, so läßt sich die Division bloß fraktionsmäßig anzeigen; z. B.

$$af : cd = \frac{af}{cd}.$$

$$3gp : 3pr = \frac{3gp}{3pr} = \frac{g}{r}.$$

$$a^2b : c^2d = \frac{a^2b}{c^2d}.$$

V. Nicht allezeit läßt sich das Dividend als ein Produkt aus zwei Faktoren darstellen, deren einer der Divisor, der andere der Quotient ist. In diesem Falle wird der Quotient wenigstens zum Theile eine Fraktion. Z. B.

$$29 : 7 = \frac{28+1}{7} = \frac{4.7+1}{7} = 4 + \frac{1}{7}.$$

$$(af + c) : f = a.\frac{f}{f} = \frac{c}{f} = a + \frac{c}{f}.$$

In diesem Falle muß man, um das Dividend wieder zu erhalten, den Quotus mit dem Divisor multipliziren, und zum Produkte den gebliebenen Rest addiren; z. B. $4\frac{1}{7}.7 = 28 + 1 = 29$.

$$(a + \frac{c}{f}) \times f = af + c.$$

VI. Ist das Dividend positiv, so erhält der Quotient das nämliche Zeichen, welches der Divisor hat; denn nur Faktoren mit gleichen Zeichen geben ein positives Produkt. Ist das Dividend negativ, so muß der Quotient das entgegengesetzte Zeichen des Divisors erhalten, weil nur zwei entgegengesetzte Größen ein negatives Produkt geben. (Vergl. §. 34. und §. 28). Kürzer läßt sich die Regel so ausdrücken, daß gleiche Zeichen des Dividends und Divisors einen positiven, ungleiche Zeichen aber einen negativen Quotus geben. — Z. B.

1) $+af : +f = af : f = +a = a$; denn $a \times f = af$.
2) $af : -f = -a$; denn $-f \times -a = +af$.
3) $-af : f = -a$; denn $-a \times f = -af$.
4) $-af : -f = +a$; denn $+a \times -f = -af$.

§. 36.

Regeln der Division zusammengesetzter Größen.

I. Um die Division zweier Größen bloß anzuzeigen, bedient man sich entweder des gewöhnlichen Fraktions- oder des Divisionszeichens; bei letzterer Bezeichnungsart müssen aber zusammengesetzte Größen in Parenthesen eingeschlossen werden. Z. B.

$a+b$ dividirt durch $c+d = \frac{a+b}{c+d}$ oder $(a+b) : (c+d)$.

II. Wenn das Dividend eine zusammengesetzte Formel, der Divisor aber nur eine einfache Größe ist; so müssen alle Glieder des ersten nach §. 35 besonders dividirt werden. Dabei werden daher

1. die Koeffizienten dividirt,
2. die Exponenten gleichartiger Buchstabengrößen subtrahirt.
3. Gleiche Zeichen im Dividend und Divisor geben einen positiven, ungleiche Zeichen einen negativen Quotus; z. B.

$(15a^2b - 18ab^2 + 24b^3) : 3b = 5a^2 - 6ab + 8b^2$.

III. Die Probe wird durch die Multiplikation gemacht, indem man den Quotus mit dem Divisor multiplizirt; z. B.

$3b \times (5a^2 - 6ab + 8b^2) = 15a^2b - 18ab^2 + 24b^3$.

IV. Läßt sich dann ein Glied durch den Divisor nicht theilen, so wird der Quotus als Fraktion angeschrieben; z. B.

$(a^2 - ab + b^2) : a^2 = \frac{a^2}{a^2} - \frac{ab}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2}$.

* Ist das Dividend ein $\pm$, der Divisor mehrtheilig, so kann die Division immer nur angezeigt werden. Z. B. $a^3 : (a^2 + a)$ gibt keineswegs $a + a^2$, weil sonst $(a + a^2) \times (a^2 + a) = a^3$ seyn müßte. Es kann ein mehrtheiliger Divisor nur als ein Ganzes zur Division kommen, und daher nur in ein mehrtheiliges Dividend dividirt werden, weil er nur in solchem als Faktor enthalten seyn kann.

V. Sind Dividend und Divisor zusammengesetzte Größen, so wird das erste Glied des Dividends durch das erste des Divisors dividirt, und der Quotus beiseits geschrieben. Hierauf wird der ganze Divisor mit dem eben erhaltenen Quotus multiplizirt, und das Produkt vom Dividend abgezogen, (oder was eines ist, nach veränderten Zeichen zum Dividend addirt). Ist das Dividend noch nicht erschöpft, so müssen auch noch die übrigen Theile desselben durch den nämlichen Divisor getheilt werden, indem man zum gebliebenen Reste, welcher gewöhnlich das erste Glied des Dividends wird, immer neue Glieder aus dem Dividend, entweder wirklich, oder bloß im Sinne herabsetzt. Hierbei ist auch zu merken, daß sich das erste Glied jedes Dividends allezeit rein aufdividiren lasse.

VI. Um sich die Rechnung zu erleichtern, erwählt man sich einen schicklichen Theil des Divisors, z. B. den ersten von den vorkommenden Buchstaben nach alphabetischer Ordnung, und nach diesem Buchstaben reiht man auch alle Glieder des Dividends so nacheinander, daß die höchsten Würden dieses Buchstabens zuerst gesetzt werden. — Der ganze Mechanismus der Operation läßt sich am leichtesten durch Uebung erlernen. Als Leitfaden dient auch hier der Vers: Divide, Multiplica, Subtrahe, Pone loca!

§. 37.

Beispiele der Division.

I. $(3a^2 - 2ab) : (3a - 2b)$.

II. $(a^2 - b^2) : (a + b)$.

III. $(x^2 + 3xy + 2y^2) : (x + y)$.

IV. $(x^3 - y^3) : (x - y)$.

V. $(x^4 + 4y^4) : (x^2 - 2xy + 2y^2)$.

VI. $(1 - 5a + 10a^2 - 10a^3 + 5a^4 - a^5) : (1 - 2a + a^2)$.

VII. $(a^6 + a^4b^2 - a^2b^4 - b^6) : (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$.

VIII. $\dfrac{m^4 + m^3n^2 - 2n^4 + 2m^2p^2 - 5n^2p^2 - 3p^4}{m^2 - n^2 - p^2}$.

§. 38.

Auflösung.

I.

$3a^2 - 2ab$	$-\mid-$	a
$(3a - 2b)$		b
$3a^2 - 2ab$		
$-\quad+$		
$0.$		

Probe.

$(3a - 2b) \times a$
$= 3a^2 - 2ab.$

II. $a^2 - b2$ | $a - b$

$(a + b)$ − | −

$a^2 + ab$ | b

− −

$-ab - b^2$

$(a + b)$

$-ab - b^2$

\+ +

0.

Anmerkung. Wenn man die Differenz der Quadrate zweier Zahlen durch die Summe derselben in der ersten Würde dividirt, so ergibt sich die Differenz dieser Größen ebenfalls in der ersten Würde.

III. $x^2 + 3xy + 2y^2$ | $x + 2y$

$(x + y)$ − | −

$x^2 + xy$ | b

− −

$2xy + 2y^2$

$(x + y)$

$2xy + 2y^2$

− −

0.

Probe.

$x + 2y$

$x + y$

$x^2 + 2xy$

$+ xy + 2y^2$

$x^2 + 3xy + 2y^2$.

IV. $x^3 - y^3$ | $x^2 + xy + y^2$

$(x - y)$ − | −

$x^3 - x^2y$ | b

− +

$x^2y - y^3$

$(x - y)$

$x^2y - xy^2$

− +

$xy^2 - y^3$

$(x - y)$

$xy^2 - y^3$

− +

0.

* Die Probe zur Uebung!

V. $x^4 + 4y^4$ | $x^2 + 2xy + 2y^2$

$(x^2 - 2xy + 2y^2)$ − | −

$x^4 - 2x^3y + 2x^2y^2$ | b

− + −

$+2x^3y - 2x^2y^2$

$(x^2 - 2xy + 2y^2)$

$2x^3y - 4x^2y^2 + 4xy^3$

− + −

$+2x^2y^2 - 4xy^3 - 4y^4$

$(x^2 - 2xy + 2y^2)$

$2x^2y^2 - 4xy^3 + 4y^4$

− + −

0.

Anmerkung. Im folgenden Beispiele ist das erste Glied die Zahl 1, weil man mit einer negativen Würdengröße nicht leicht eine Formel anfängt.

VI. $1-5a+10a^2-10a^3+5a^4-a^5 \mid 1-3a+3a^2-a^3$

$(1-2a+a^2)$ $-\mid-$

$-\quad+\quad-$ $\quad b$

$-3a+9a^2-10a^3$

$(1-2a+a^2)$

$-3a+6a^2-3a^3$

$+\quad-\quad+$

$3a^2-7a^3+5a^4$

$(1-2a+a^2)$

$3a^2-6a^3+3a^4$

$-\quad+\quad-$

$-a^3+2a^4-a^5$

$(1-2a+a^2)$

$-a^3+2a^4-a^5$

$+\quad-\quad+$

0.

VII. $a^6+a^4b^2-a^2b^4-b^6 \mid a^3-a^2b+ab^2-b^3$

$(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$ $-\mid-$

$a^6+a^5b+a^4b^2+a^3b^3$

$-\quad-\quad-\quad-$ $\quad b$

$-a^5b-a^3b^3-a^2b^4-b^6$

$(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$

$-a^5b-a^4b^2-a^3b^3-a^2b^4$

$+\quad+\quad+\quad+$

$a^4b^2-b^6$

$(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$

$a^4b^2+a^3b^3+a^2b^4+ab^5$

$-\quad-\quad-\quad-$

$-a^3b^3-a^2b^4-ab^5-b^6$

$(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$

$-a^3b^3-a^2b^4-ab^5-b^6$

$+\quad+\quad+\quad+$

0.

Es sey in diesem Beispiele $a=3$, $b=2$;

so ist das Dividend $=729+324-144-64=845$;

der Divisor $=27+18+12+8=65$;

der Quotus $=27-18+12-8=13$;

und wirklich: $845:65=13$.

VIII. $m^4+m^2n^2-2n^4+2m^2p^2-5n^2p^2-3p^4$

$(m^2-n^2-p^2)$ | $m^2+2n^2+3p^2$

$m^4-m^2n^2-m^2p^2$ | $-$

$-\quad+\quad+$ b

$2m^2n^2-2n^4+3m^2p^2$

$(m^2-n^2-p^2)$

$2m^2n^2-2n^4-2n^2p^2$

$-\quad+\quad+$

$3m^2p^2-3n^2p^2-3p^4$

$(m^2-n^2-p^2)$

$3m^2p^2-3n^2p^2-3p^4$

$-\quad+\quad+$

0.

§. 39.

Die Multiplikation wird durch die Division geprüft, indem man das Produkt durch einen Faktor dividirt, worauf der andere als Quotus erscheint; z. B.

$$(x+y)\times(x^2+xy+y^2)=x^3+2x^2y+2xy^2+y^3.$$

Probe:

I.

$x^3+2x^2y+2xy^2+y^3$

(x^2+xy+x^2) | $(x+y.$

$x^3+x^2y+xy^2$

$-\quad-\quad-$

$x^2y+xy^2+y^3$

$(x^2+xy^2+y^2$

$x^2y+xy^2+y^3$

$-\quad-\quad-$

0.

II.

$x^3+2x^2y+2xy^2+y^3$ | $(x^2+xy+y^2$

$(x+y)$

x^3+x^2y

$-\quad-$

x^2y+2xy^2

$(x+y)$

x^2y+xy^2

$-\quad-$

xy^2+y^3

$(x+y)$

xy^2+y^3

$-\quad-$

0.

§. 40.

Erklärungen und Zusätze.

I. Der Quotus wird desto größer, je größer bei einerlei Divisor das Dividend, oder je kleiner bei einerlei Dividend der Divisor wird; z. B.

24 | : 12 = 2. und : 48 | 48 = 1.
36 | : 12 = 3. | 24 = 2.

Allgemein habe man den Ausdruck der Division:

$$D : d = q.$$

Der Quotus (q) wird also m mal so groß, oder durch m multiplizirt, wenn ich entweder das Dividend mit m multiplizire, oder den Divisor durch m dividire;

$$\text{also: } D.m : d = mq.$$

$$D : \frac{d}{m} = mq.$$

II. Der Quotus wird um so vielmal kleiner, je kleiner entweder bei einerlei Divisor das Dividend, oder je größer bei einerlei Dividend der Divisor wird. Z. B.

48	: 2 = 24.	und :	48	: 2 = 24.
24	: 2 = 12.			: 4 = 12.

Der Quotus (q) wird also m mal so klein, oder durch m dividirt, wenn ich entweder das Dividend durch m dividire, oder den Divisor durch m multiplizire.

$$\frac{D}{m} : d = D : dm = \frac{q}{m}.$$

III. Der Quotus bleibt unverändert, wenn man Divisor und Dividend mit der nämlichen Größe multiplizirt oder dividirt;

$$\text{z. B. } 24 : 8 = 24.2. : 8.2. = \frac{24}{2} : \frac{8}{2} = 3.$$

Allgemein: $Dm : dm = q.$

$$\frac{D}{m} : \frac{d}{m} = q.$$

IV. Anstatt mit dem ganzen Divisor auf einmal das gegebene Dividend zu dividiren, kann man die Division mit den einzelnen Faktoren des Divisors, wenn dieser ein Produkt ist, nach und nach verrichten; z. B.

$$1728 : 24 = 1728 : 4.\ 6.$$

$$\left.\begin{array}{l} 1728 : 6 = 288 \\ 288 : 4 = 72 \end{array}\right\} \quad 1728 : 24 = 72.$$

$$36a^3bc : 12a^2b = 12abc : 4b = 3ac.$$

V. Wenn nun ein Dividend, so in seine Faktoren zerlegt, dividirt werden soll, so geschieht diese Division, wenn nur Ein

Faktor desselben, gleichviel welcher, dividirt wird, indem dadurch immer ein dem Dividend und Divisor gemeinschaftlicher Faktor gehoben wird; z. B.

$$\frac{20.7.8.9}{4} = 20.7.2.9 = 5.7.8.9.$$

$$\frac{ab.bc.df.}{bc} = abdf. \text{ (vergl. §. 35. I.).}$$

Folgende Ausdrücke sind daher identisch:

$$\frac{a.b}{c} = \frac{a}{c}.b = a.\frac{b}{c}.$$

$$\text{und } \frac{3\overset{a}{0}(b+c)}{(a+d)} = \frac{3a}{a+d}.(b+c) = 3a\frac{(b+c)}{a+d}.$$

VI. Gleiches durch Gleiches multiplizirt oder dividirt gibt Gleiches, Ungleiches durch Gleiches, oder umgekehrt, gibt Ungleiches; und zwar ist jenes Produkt das größere, in welchem der ungleiche Faktor größer, jener Quotient der größere, in welchem bei gleichem Dividend der Divisor kleiner, oder bei gleichem Divisor das Dividend größer ist. Z. B.

$$a + b = S.$$
$$a = a$$
$$a^2 + ab = aS.$$
$$\text{oder } \frac{a+b}{a} = \frac{S}{a}$$
$$1 + \frac{b}{a} = \frac{S}{a}$$

$$a + b = S$$
$$a < b$$
$$a^2 + ab < bS$$
$$\frac{a+b}{a} > \frac{S}{b} \text{ u. s. w.}$$

VII. Eine Größe durch eine andere zugleich multiplizirt und dividirt, wird in ihrem Werthe nicht geändert, indem diese beiden entgegengesetzten Veränderungen sich gegenseitig aufheben. Z. B.

$$6 = \frac{6.3}{3}, \; a = \frac{a.m}{m}.$$

Sechster Artikel.

Von dem Zerfällen komplexer Größen und der Theilbarkeit der Größen.

§. 41.

Eine komplexe Buchstabengröße zerfällen, heißt diese Größe so als ein Produkt darstellen, daß auch die Faktoren sichtbar wer-

den, aus denen sie entstanden ist. Ein Produkt zerfällen, oder auf seine ursprünglichen Faktoren zurückführen, ist also identisch. Es wird hier vorausgesetzt, daß beide Faktoren, oder wenigstens einer von beiden mehr als ein Glied habe, d. i. eine zusammengesetzte Größe sey. Denn das Zerfällen einfacher Größen hat gar keine Schwierigkeit, und ist aus den Regeln der Multiplikation und Division einfacher Größen hinlänglich bekannt. — Wiewohl nun dieses Zerfällen komplexer Größen in der ganzen Mathematik von größter Wichtigkeit ist, wie bei der Lehre von den Gleichungen noch deutlicher erscheinen wird, so ist hier doch anzumerken, daß sich für alle Fälle keine bestimmten Regeln geben lassen, sondern daß das Meiste auf Uebung und eigne Erfindung ankomme.

Man kann hier zweierlei Fälle unterscheiden:

I. Wenn nur ein Faktor der komplexen Größe zusammengesetzt ist;

II. wenn es beide, oder alle drei, vier sind.

§. 42.

Wenn nur ein Faktor der komplexen Größe mehrgliederig oder zusammengesetzt ist, z. B. in $ax + bx - x$, welches man daraus erkennt, daß der nämliche Buchstabe in jedem Gliede vorkommt, so gilt die Regel: Man dividire mit dem Faktor, der in jedem Gliede vorkommt, die ganze komplexe Größe; der Quotus gibt den verlangten Mitfaktor.

$$(ax + bx - x) : x = a + b - 1.$$

Beispiele. Man zerfälle

1) $4m^2p - 8mp - 4p.$

2) $ax + bx + cx.$

3) $xy + 2ay - 4y.$

4) $6x^2 - 12xy + 3x$

5) $5a - 12a^2b^3 + 6b^2c - 18b$

Auflösung.

1) $\frac{4m^2p - 8mp - 4p}{4p} = m^2 - 2m - 1.$

Also $4m^2p - 8mp - 4p = (m^2 - 2m - 1) \times 4p.$

2) $\frac{ax+bx-cx}{x} = a+b-c.$

Folglich: $ax+bx-cx = (a+b-c) \times x.$

3) $\frac{xy+2ay-4y}{y} = x+2a-4.$

Folglich: $xy+2ay-4y = (x+2a-4)\,y.$

4) $\frac{6x^2-12xy+3x}{3x} = 2x-4y+1.$

Folglich: $6x^2-12xy+3x = 3x(2x-4y+1)$

5) $\frac{-12ab^3+6cb^2-18b}{-6b} = 2ab^2-bc+3.$

Folglich: $5a-12a^2b^3+6b^2c-18b = 5a-6b(2ab^2-bc+3)$

Anmerkung. Manchesmal führt die zu zerfällende Größe auch einen Divisor in der Form einer Fraktion bei sich; dann kann die Zerfällung, wenn es angeht, auch sammt diesem Divisor vorgenommen werden; es geht aber so oft an, als der Divisor eines Gliedes auch in dem Divisor der übrigen Glieder der komplexen Größe enthalten ist. Z. B.

a) $\frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha\beta}{1.2} = \left(1+\frac{\beta}{2}\right)\frac{\alpha}{1} = \frac{(2+b).\alpha}{1.\ 2.}$

b) $\frac{\alpha.\beta}{1.2} + \frac{\alpha.\beta.\gamma}{1.2.3} = \left(1+\frac{\gamma}{3}\right)\frac{\alpha.\beta}{1.2} = \frac{(3+\gamma)\alpha.\beta}{1.\ 2.\ 3}$

c) Allgemein: $\frac{\alpha\beta.\gamma}{d.e.f} + \frac{\alpha\beta.\gamma.\delta}{d.e.f.g} = \left(1+\frac{\delta}{g}\right)\frac{\alpha.\beta.\gamma}{d.e.f} = \frac{(g+\delta).\alpha.\beta.\gamma}{d.e.f.g}.$

§. 43.

Bei Zerfällung komplexer Größen, welche aus zwei oder mehrern zusammengesetzten Faktoren entstanden sind, ist die Sache schon schwieriger, und nicht selten kommt es dabei auf ein glückliches Errathen an. Daß dergleichen Größen nicht aus der Multiplikation eines einfachen Faktors mit einem zusammengesetzten entstanden seyen, erkennt man daraus, daß nicht in jedem Gliede der nämliche Buchstabe vorkommt, z. B. in der Größe a^2-b^2. Es lassen sich aber zur Zerfällung solcher Größen folgende Regeln aufstellen.

I. Man stelle immer jene Glieder, in welchen der nämliche Faktor vorkommt, zusammen, und zerfälle sie in Faktoren. Ist nun

in zwei oder mehrern Gliedern der nämliche mehrtheilige Faktor vorhanden, so kann man auch diesen als gemeinschaftlichen Faktor zweier oder mehrerer Glieder absondern, und letztere als den zweiten zusammengesetzten Faktor damit zusammenstellen. Z. B.

$$ac - bd + bc - ad = ac + bc - ad - bd = c(a+b) - d(a+b) = (a+b)(c-d).$$

II. Ist ein Glied eine Potenz von einer Größe, ohne mit einer andern durch Multiplikation und Division verbunden zu seyn; so ist das Polynomium gewöhnlich nur aus solchen mehrtheiligen Faktoren zusammengesetzt, welche ein Glied mit einander gemein haben. Man ordne ein solches Polynomium so, daß die höchste Potenz jener Größe an die erste Stelle zu stehen komme, und jedes andere Glied nach dem abnehmenden Exponenten der nämlichen Größe folge; so wird dann das erste Glied ein Produkt aus den ersten, das letzte Glied ein Produkt aus den zweiten Gliedern aller binomischen Faktoren seyn; vorausgesetzt, daß das gegebene Polynomium in Faktoren zerfällt werden könne. Man zerfälle nun das erste und letzte Glied in seine einfachen Faktoren, stelle einen Faktor des einen mit einem Faktor des andern als Summe oder Differenz zusammen, und multiplizire diese muthmaßlichen binomischen Faktoren, um zu sehen, ob sie zum Produkte wirklich das gegebene Polynomium geben. Z. B. Von $a^3 + a^2(b+c+d) + a(bc+bd+cd) + bcd$ ist $a^3 = a.a.a$ und $bcd = b.c.d$; stellt man a und b, a und c, a und d als Summen zusammen, und multiplizirt diese mit einander, so erhält man zum Produkte das gegebene Polynomium. Also

$$a^3 + a^2(b+c+d) + a(bc+bd+cd) + bcd = (a+b)(a+c)(a+d)$$

III. Rücksichtlich der Zeichen gelten bei der letzten Zerfällungsart folgende Gesetze:

1) Wenn in einer komplexen Größe keine Abwechslungen der Zeichen vorkommen, so haben alle Glieder der Faktoren +, oder alle —; und zwar — oder +, wenn die Anzahl der Faktoren gerade, + hingegen allein, wenn sie ungerade ist; z. B.

$$a^2 + 2ab + b^2 = (\pm a \pm b)(\pm a \pm b).$$

2) Wenn in einer komplexen Größe die Zeichen abwechseln, so sind auch in den Faktoren negative Glieder; z. B.

$$a^3+a^2b-ab^2-b^3=(a-b)(a+b)(a+b)$$

IV. Kennt man einen zusammengesetzten Faktor, so lassen sich die übrigen leichter finden, wenn man mit jenem in das Polynomium dividirt. Z. B. Von $x^3+x^2y-xy^2-y^3$ ist $x-y$ ein Faktor, da es darin ohne Rest, nämlich $(x^2+2xy+y^2)$ mal enthalten ist. Also

$$x^3+x^2y-xy^2-y^3=(x-y)(x^2+2xy+y^2).$$

Den zweiten Faktor zerfällt man nun wieder nach II., oder auch so nach I., daß man $2xy=xy+xy$ setzt. Mithin

$$x^2+xy+xy+y^2=x(x+y)+y(x+y)=(x+y)(x+y)$$

und $$x^3+x^2y-xy^2-y^3=(x-y)(x+y)(x+y)$$

V. Die Differenz der Quadrate zweier Zahlen ist jederzeit ein Produkt aus der Summe und Differenz ihrer Wurzeln; z. B. $(a-b)\,.\,(a+b)=a^2-b^2$.

VI. Die Größe $a\pm b$ läßt sich darstellen als ein Produkt aus $a\times\left(1\pm\frac{b}{a}\right)$; denn verrichtet man die Multiplikation wirklich, so erhält man wieder:

$$a\pm\frac{ab}{a}=a\pm b.$$

* Mehr hiervon bei den höhern Gleichungen.

§. 44.

Beispiele. Man zerfälle folgende komplexe Größen in ihre Faktoren:

1) x^2-25.
2) $a^2c-bc+a^2d-b^2d$
3) $bx+x+ab+a$
4) $xyz+ayz-bxz-abz-cxy-acy+bcx+abc$
5) $2y^2+yz-z^2$.
6) $a^2-a+ab-b$.
7) $mp+2np-mx-2nx$.
8) $2a^2-3ab-2b^2$.

Auflösung.

1°) $x^2 - 25 = (x+5) \cdot (x-5)$ nach Regel V.

2°) $a^2c - bc + a^2d - b^2d = a^2(c+d) - b^2(c+d) = (a^2-b^2)(c+d)$
$= (a+b)(a-b)(c+d)$

3°) $bx + x + ab + a = x(b+1) + a(b+1) = (x+a)(b+1)$

4°) $xyz + ayz - bxz - abz - cxy - acy + bcx + abc =$
$xyz - bxz - cxy + bcx + ayz - abz - acy + abc =$
$x(yz - bz - cy + bc) + a(yz - bz - cy + bc) =$
$(x+a)(yz-bz-cy+bc) = (x+a)[z(y-b) - c(y-b)] =$
$(x+a)(z-c)(y-b)$.

5°) Da das erste Glied $2y^2 = 2y \times y$,
das letzte Glied $-z^2 = +z \times -z$, so wird
$2y^2 + yz - z^2 = (2y-z) \times (y+z)$.

* Hätte man mit $2y$ das Glied $+z$ verbinden wollen, so würde im Produkte $-yz$ entstanden seyn.

** Man hätte dieses Trinomium auch so zerfällen können, daß man $yz = 2yz - yz$ setzte, also

$2y^2 + yz - z^2 = 2y^2 + 2yz - yz - z^2 = 2y(y+z) - z(y+z)$
$= (2y-z)(y+z)$.

6°) Hier ist $A = a^2 = a \times a$,
$B = -b = b \times -1$, oder $-b \times +1$.

Da aber das Glied ab positiv, und der eine Faktor a ebenfalls positiv ist, so muß es auch der andere b seyn.

Also $(a^2 - a + ab - b) = (a+b) \cdot (a-1)$.

7°) Aus gleichem Grunde ist $A = m \times p$,
$B = 2n \times -x$.

Also $pm + 2np - mx - 2nx = (m+2n) \times (p-x)$.

8°) $A = a \times 2a$,
$B = 2b \times -b$, oder $-2b \times +b$.

Also $2a^2 - 3ab - 2b^2 = (2a+b) \cdot (a-2b)$.

* Hätte man mit $2a$ das Glied $-2b$ verbunden, so würde im Produkt $2a^2 - 2b^2$ erschienen seyn, nach Regel V. Denn $2a - 2b = (a-b)2$; folglich $(a+b) \times (a-b)2 = 2a^2 - 2b^2$.

** Man kann dieses Beispiel auch so auflösen:

$2a^2 - 3ab - 2b^2 = 2a^2 - 4ab + ab - 2b^2 = 2a(a-2b) + b(a-2b)$
$= (2a+b)(a-2b)$.

§. 45.

Eine Größe P ist durch eine andere d nur dann ohne Rest theilbar, wenn sie m faches von der andern, d. i. ein Produkt ist, dessen eine Faktor die Größe d ist. So ist $6a^2$ durch 2a theilbar, weil $6a^2 = 3a \cdot 2a$, $4a^2 - 4b^2$ theilbar durch $2a+2b$ und $2a-2b$, weil $4a^2 - 4b^2 = (2a+2b)(2a-2b)$. Dagegen ist $a^2 + b^2$ weder durch $a+b$, noch durch eine andere Größe theilbar, weil es nicht in Faktoren zerfällt werden kann. Solche Größen, welche nur durch sich und 1 theilbar sind, kann man, wie bestimmte Zahlen von der angegebenen Beschaffenheit, absolute Primzahlen heißen.

Die geraden, d. i. durch 2 theilbaren Zahlen werden begriffen in der Formel: $2m$; die ungeraden in $2m \pm 1$.

§. 46.

Sieht man auf die Verbindung gerader und ungerader Zahlen mit einander, so ergibt sich Folgendes:

I. Die Summe, die Differenz und das Produkt zweier gerader Zahlen gibt wieder eine gerade. Z. B.

$2m + 2m = 4m.$	$m = 3.$	$6 + 6 = 12.$
$6m - 2m = 4m.$		$18 - 6 = 12.$
$2m \times 4m = 8m^2.$		$6 \times 12 = 72.$

II. Die Summe und Differenz zweier ungeraden Zahlen und das Produkt einer geraden und ungeraden Zahl ist ebenfalls gerade.

Z. B. $(2m+1) + (2m+1) = 4m+2$	Z. B. $7+7 = 14.$
$(4m+1) - (2m+1) = 2m.$	$13-7 = 6.$
$2m \times (2m+1) = 4m^2 + 2m.$	$6 \times 7 = 42.$

III. Die Summe oder Differenz von einer geraden und einer ungeraden Zahl ist, so wie das Produkt aus zwei ungeraden Zahlen, ebenfalls ungerade.

Z. B. $2m + (2m+1) = 4m+1.$	$6+7 = 13.$
$(2m+1) - (2m) = 1.$	$7-6 = 1.$
$(2m+1) \times (2m+1) = 4m^2 + 4m + 1.$	$7 \times 7 = 49.$

§. 47.

Zwei oder mehrere Größen haben einen gemeinschaftlichen Theiler, wenn sie gleichartige Produkte, d. i. Produkte sind,

in welchen die nämliche Größe als Faktor vorkommt. Größter gemeinschaftlicher Theiler ist jene Größe, welche, wenn man die gegebenen Größen damit dividirt, diese als Primzahlen unter sich, d. i. als Größen darstellt, welche keinen gemeinschaftlichen Theiler mehr haben.

Sind die Größen Monomien, so ist der größte gemeinschaftliche Theiler in Hinsicht auf Buchstabengrößen sogleich sichtbar; er ist nämlich das Produkt der gemeinschaftlichen höchsten Potenzen der Buchstaben. Z. B. von $36a^3b^2c$ und $48a^4bd$ ist $12a^3b$ größter gemeinschaftlichen Theiler, indem die Quotusse $3bc$ und $4ad$ durch keine andere gemeinschaftliche Größe mehr getheilt werden können.

Sind die gegebenen Größen Polynomien, so muß man sie nach §. 42 und 43 in Faktoren zerfällen. Ist der gemeinschaftliche Theiler eine eintheilige Größe, so ist er immer gleich sichtbar, indem er in jedem Gliede der gegebenen Größen als Faktor stehen muß. Z. B. Von $8ax^2 - 4a^2x^3 + 12ax^4$ und $16a^2x^3 + 12ax^2 - 4x^5$ ist $4x^2$ größter gemeinschaftlicher Theiler, weil

$$8ax^2 - 4a^2x^3 + 12ax^4 = 4ax^2(2 - ax + 3x^2), \text{ und}$$
$$16a^2x^3 + 12ax^2 - 4x^5 = 4x^2(4a^2x + 3a - x^3).$$

Von den Polynomien $a^2 - x^2$ und $ab - bx + ay - xy$ ist $a - x$ gemeinschaftlicher Theiler, weil $a^2 - x^2 = (a+x)(a-x)$ und $ab - bx + ay - xy = (a-x)(b+y)$.

$a^3 - a^2$ und $a^3 - 4a^2 + b$ haben keinen gemeinschaftlichen Theiler; weder einen eintheiligen, da das letzte Glied b vom zweiten Polynomium a nicht als Faktor enthält; keinen mehrtheiligen, weil die gegebenen Größen auch nicht in mehrtheilige Faktoren zerfällt werden können.

§. 48.

Aufgabe. Das kleinste gemeinschaftliche Dividend für was immer für gegebene Theiler, d. i. die kleinste Größe zu finden, in welcher die gegebenen Größen ohne Rest enthalten sind.

Auflösung. Man zerfälle jeden der gegebenen Theiler in seine einfachen Faktoren, welche bei Zahlengrößen Primzahlen

sind. Das Produkt aus allen verschiedenartigen, und aus der höchsten Würde gleichartiger Faktoren, so wie sie bei einem einzigen Theiler als Faktor vorkommt, ist das kleinste gemeinschaftliche Dividend oder Dividuum für alle gegebenen Divisoren. Solche, welche ohnehin in einem gegebenen höhern enthalten sind, durchstreicht man gleich anfänglich, ohne sie zu zerfällen. Denn was Dividend für das Mehrfache (ma, oder ma^n) ist, ist es auch für das Einfache (a). Sind daher in einer gegebenen Größe alle übrigen enthalten, so ist jene das kleinste Dividuum.

Beispiele. Welches sind die kleinsten gemeinschaftlichen Dividende

I. für die Divisoren: 6, 7, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 36, 48?

II. für $3ab$, $5a^2b^2$, $6abc$, $8abc^2$?

III. für $2a+2b$, $4a-4b$, a^2-b^2, $2(a+b)^2$.

Operation:

I. 6, 8, 9, x6, x2, x8, 24, 7, | 15, | 20, | 36, |
1.7, | 3.5, | 2.2.5, | 3.3.2.2. |

48, |
2.2.2.2.3 | also 2. 2. 2. 2. 3. 3. 5. 7 = 5040, kleinstes, gemeinschaftliches Dividend für alle obigen Theiler. Auf diese Weise erhält man zugleich den jedem Theiler zugehörigen Quotus, wenn man von diesen 8 einfachen Faktoren jederzeit so viele hinwegläßt, als der Divisor selbst beträgt; das Produkt der übrigen gibt den jedesmaligen Quotus.

Z. B. 5040 |
: 24 = 2.2.2.2.3.3.5.7 = 210.
: 20 = 2.2.2.2.3.3.5.7 = 63.4 = 252.
: 36 = 2.2.2.2.3.3.5.7 = 140.
: 48 = Quotus von 24 = 105.
2
: 15 = 2.2.2.2.3.3.5.7 = 48.7 = 336.
: 7 = 2.2.2.2.3.3,5.7 = 720.

II. $3ab$, $5a^2b^2$, $6abc$, $8abc^2$ =
3.a.b, 5.a.a.b.b, 3.2.a.b.c, 2.2.2.a.b.c.c.
Kleinstes gemeinschaftliches Dividend = $3.5.8.a^2.b^2.c^2$
= $120a^2b^2c^2$.

Denn $120a^2b^2c^2$	$:3ab = 40abc^2$.	Nun sieht man augenscheinlich, daß diese Quotusse unter sich Primzahlen sind, indem kein Faktor in allen vieren gemeinschaftlich vorkommt. Also ꝛc.
	$:5a^2b^2 = 24c^2$.	
	$:6abc = 20abc$.	
	$:8abc^2 = 15ab$.	

III. $2a+2b$, $4a-4b$, a^2-b^2, $(a+b)^2 =$
$2(a+b)$, $4(a-b)$, $(a+b)(a-b)$, $(a+b)(a+b)$.

Kleinstes Dividuum $= 4(a+b)^2(a-b)$.

$4(a+b)^2(a-b)$	$:2(a+b) = 2(a+b)(a-b) = 2a^2-2b^2$.
	$:4(a-b) = (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$.
	$:(a+b)(a-b) = 4(a+b) = 4a+4b$.
	$:(a+b)^2 = 4(a-b) = 4a-4b$.

Zweites Hauptstück.

Lehre von den Brüchen (Fraktionen).

Erster Artikel.

Vorbegriffe und Vorübungen.

§. 49.

Enthält eine Größe B (z. B. 5 Kreuzer) einen oder mehrere Theile der einer andern Größe A (1 Gulden) zu Grunde liegenden Einheit, so heißt B in Rücksicht auf A ein Bruch. In einem Bruche sind daher zwei Begriffe enthalten: 1) die Anzahl der Theile, in welche die Grundeinheit (die Einheit von A) getheilt ist — Nenner —, und 2) die Anzahl der davon genommenen Theile (die Anzahl der Bruchseinheiten) — Zähler. Man schreibt den Nenner unter den Zähler, und zieht zwischen beiden einen wagerechten Strich. Z. B. $\frac{n}{m}$ enthält den mten Theil der Grundeinheit n mal.

§. 50.

Ein Bruch ist ein Quotient, dessen Dividend der Zähler, und dessen Divisor der Nenner ist. Denn es ist

$$\frac{n}{m} = (1 : m) \times n \quad (\S.\ 49)$$
$$= n : m \quad (\S.\ 40.\ I.)$$

Daher können alle bei der Division geltenden Sätze auch auf Brüche angewendet werden.

1) Der Werth eines Bruches bleibt unverändert, wenn man Zähler und Nenner durch einerlei Zahl multiplizirt oder dividirt.

$$\frac{6a^2}{9ab} = \frac{6a^2 : 3a}{9ab : 3a} = \frac{2a}{3b} = \frac{2a \cdot b}{3a \cdot b} \quad (\S.\ 40.\ III.).$$

2) Der Werth eines Bruches ist um so größer, je größer bei einerlei Nenner (Divisor) der Zähler (Dividend) ist, oder je kleiner bei einerlei Zähler der Nenner ist. So ist

$\frac{3m}{n} > \frac{m}{n}$ und $\frac{m}{n} > \frac{m}{3n}$, und zwar immer um das Dreifache.

(§. 40. I.).

3) Jedes Ganze kann in einen Bruch mit gegebenem Nenner verwandelt werden, wenn man es mit diesem multiplizirt. So wird A in einen Bruch mit dem Nenner m verwandelt, wenn man es mit m multiplizirt:

$$A = \frac{Am}{m} \quad (\S.\ 40.\ VII.)$$

§. 51.

Ein Bruch wird durch ein Ganzes

a) **multiplizirt**, wenn man entweder den Zähler multiplizirt, oder den Nenner dividirt, indem im ersten Falle der Werth einer Bruchseinheit unverändert bleibt, die Anzahl von solchen aber vervielfacht wird; im zweiten Falle die Anzahl der Theile, in welche das Ganze getheilt ist, vermindert, folglich der Werth der (ihrer Anzahl nach unveränderten) Bruchseinheiten vervielfacht wird.

$$\frac{n}{4m^2} \times 2m = \frac{n \cdot 2m}{4m^2} = \frac{n}{4m^2 : 2m} = \frac{n}{2m}.$$

b) **dividirt**, wenn man entweder den Zähler dividirt, oder den Nenner multiplizirt. Die Gründe davon sind denen bei der Multiplikation analog.

$$\frac{2n^2}{m} : n = \frac{2n^2 : n}{m} = \frac{2n^2}{m \cdot n} = \frac{2n}{m}. \quad (\text{Vgl. } \S.\ 40.\ I.\ u.\ II.)$$

*Beispiele hierüber folgen unten.

§. 52.

Einen Bruch reduziren heißt, ihn unbeschadet seines Werthes auf eine andere Form bringen. Alle Reduktionen der Brüche beruhen auf den zunächst vorhergehenden Sätzen.

a) Aufgabe. Gemischte Größen, d. i. Ganze mit angehängtem Bruche in einen Bruch mit dem nämlichen Nenner zu verwandeln.

Auflösung. Man verwandle die Ganzen in einen Bruch mit dem Nenner des angehängten Bruches (§. 50. 3°.), und addire die Zähler.

Z.B. 1) $a+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c}$.

2) $a+b+\frac{ab-b^2}{a+b}=\frac{a^2+2ab+b^2+ab-b^2}{a+b}=\frac{a(a+3b)}{a+b}$.

3) $a+b-\frac{a^2(b+a)}{a^2-b}=\frac{a^3+a^2b-ab-b^2-a^2b-a^3}{a^2-b}=\frac{-ab-b^2}{a^2-b}$.

* Multiplizirt man vom letzten Bruche Zähler und Nenner mit -1, so ändern sich durchaus die Zeichen, und der Bruch wird $=\frac{ab+b^2}{b-a^2}$.

b) Aufgabe. Einen zusammengesetzten Bruch in gemischte Größen zu verwandeln.

Auflösung. Man dividire den gegebenen Zähler durch den Nenner, so weit es möglich, und hänge dem Quotienten einen Bruch an, dessen Zähler der Rest, und dessen Nenner der gegebene Nenner ist.

Z.B. $\frac{ab-ac+d}{b-c}=\frac{a(b-c)+d}{b-c}=a+\frac{d}{b-c}$.

§. 53.

c) Aufgabe. Brüche zu verkleinern, d. i. auf die kleinste Form zu bringen.

Auflösung. Man zerfälle Zähler und Nenner in Faktoren, und lasse die gemeinschaftlichen Theiler hinweg. (Vergl. §. 42, 43 u. 47).

Beispiele. Man verkleinere die Fraktionen:

1°) $\frac{ab^2c}{a^2b^2c^2}$. | 2°) $\frac{3bc^2d^2}{9bc^3d}$. | 3°) $\frac{39x^2y}{52xy^2}$.

4°) $\frac{ad+bd}{2bd-cd}$. | 5°) $\frac{a^2-16}{ab+4b+ac+4c}$.

6°) $\frac{x^2-x+xy-y}{2xy-xz-2y+z}$. | 7°) $\frac{1-a^2}{3b-c-3ab+ac}$.

Auflösung.

1°) $\frac{ab^2c}{a^2b^2c^2} = \frac{1}{ac}$.

2°) $\frac{3bc^2d^2}{9bc^3d} = \frac{1d}{3c} = \frac{d}{3c}$.

3°) $\frac{39x^2x}{52xy^2} = \frac{3x}{4y}$.

4°) $\frac{ab+bd}{2bd-cd} = \frac{(a+b)d}{(2b-c)d} = \frac{a+b}{2b-c}$.

5°) $\frac{a^2-16}{ab+4b+ac+4c} = \frac{(a-4)\times(a+4)}{(b+c)\times(a+4)} = \frac{a-4}{b+c}$.

6°) $\frac{x^2-x+xy-y}{2xy-xz-2y+z} = \frac{(x+y).(x-1)}{(2y-z).(x-1)} = \frac{x+y}{2y-z}$.

7°) $\frac{1-a^2}{3b-c-3ab+ac} = \frac{(1+a).(1-a)}{(3b-c).(1-a)} = \frac{1+a}{3b-c}$.

§. 54.

d) Aufgabe. Fraktionen auf den kleinsten Generalnenner zu bringen.

Auflösung. Dieser Generalnenner ist nichts anders, als das kleinste gemeinschaftliche Dividend für alle speciellen Nenner, welche hier die Divisoren vorstellen. Um also diesen kleinsten gemeinschaftlichen Nenner zu finden, verfährt man ganz, wie §. 48 gezeigt worden. Hat man ihn gefunden, so dividirt man mit jedem gegebenen Nenner in den Generalnenner, und multiplizirt mit dem Quotus den dazu gehörigen Zähler. Aus der Division des Generalnenners durch den speziellen Nenner ergibt sich nämlich der jedesmalige Faktor, mit welchem Zähler und Nenner eines Bruches multiplizirt werden müssen, um ihn auf den Ge-

neralnenner zu bringen. — Dadurch wird aber der Werth des Bruches nicht gestört. (Vgl. §. 50. 1°.)

Beispiele. Man bringe auf den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner:

I. $\frac{a}{2b}, \frac{2b}{3c}, \frac{4c}{7b^2}, \frac{2d}{21c^2}$.

II. $\frac{3p}{4m}, \frac{2n}{5m^2}, \frac{5x}{8y}, \frac{7y}{16x}$.

III. $\frac{a}{b}, \frac{2b-c}{2c+d}$.

IV. $\frac{a^2-b}{ac+bc}, \frac{a+b}{3a-3b}, \frac{a^2+b^2}{2a^2-2b^2}$.

Auflösung.

I. Nenner: $2b, 3c, 7b^2, 21c^2$.

Generalnenner: $42b^2c^2$.

$$\frac{a}{2b}, \frac{2b}{3c}, \frac{4c}{7b^2}, \frac{2d}{21c^2} = \frac{21abc^2, 28b^3c, 24c^3, 4b^2d}{42b^2c^2}$$

II. Nenner: $4m, 5m^2, 8y, 16x$.

Generalnenner: $80m^2yx$.

$$\frac{3p}{4m}, \frac{2n}{5m^2}, \frac{5x}{8y}, \frac{7y}{16x} = \frac{60mpxy, 32nxy, 50m^2x^2, 35m^2y}{80m^2xy}.$$

III. $$\frac{a}{b} + \frac{2b-c}{2c+d} = \frac{2ac+ad+2b^2-bc}{2bc+bd}.$$

IV. Nenner: $ac+bc = c(a+b)$, $3a-3b = 3(a-b)$,
$2a^2-2b^2 = 2(a+b)(a-b)$.

Kleinster Generalnenner: $3.2.c(a+b)(a-b) = 6a^2c-6b^2c$.

$$\frac{a^2-b}{ac+bc}, \frac{a+b}{3a-3b}, \frac{a^2+b^2}{2a^2-2b^2} = \frac{6(a-b)(a^2-b), 2c(a+b)^2, 3c(a^2+b^2)}{6a^2c-6b^2c}.$$

Zweiter Artikel.

Stammrechnungsarten mit gemeinen Brüchen.

I. Addition und Subtraktion.

§. 55.

Es lassen sich nur gleichartige Größen addiren und von einander subtrahiren. Brüche sind aber gleichartig, wenn sie

gleiche Nenner haben, indem dann die ihnen zu Grunde liegenden Einheiten von gleichem Werthe sind. Daher müssen Brüche, welche addirt oder subtrahirt werden sollen, vorher unter einerlei Nenner gebracht werden (§. 54), wenn sie nicht schon in dieser Form gegeben sind. Haben Brüche gleiche Nenner, so werden ihre Zähler als Ganze addirt oder subtrahirt, und unter die Summe oder Differenz der gemeinschaftliche Nenner gesetzt. Die Veränderung bezieht sich dabei nur auf die Zähler, weil man immer nur um die Summe oder Differenz der gleichartigen Bruchseinheiten fragt.

Führen die Brüche auch Ganze mit sich, so werden entweder die Ganzen und Brüche einzeln mit einander verbunden, oder die Ganzen in Brüche mit dem Nenner des angehängten Bruches verwandelt, und auf die angegebene Art behandelt.

Beispiele mit Auflösung.

1) $\frac{a}{b}+\frac{b}{d}+\frac{c}{2d}=\frac{2ad+2b^2+bc}{2bd}$.

2) $\frac{a}{x}+\frac{b}{2x^2}-\frac{c}{3ax^3}=\frac{6a^2x^2+3abx-2c}{6ax^3}$.

3) $\left(a+\frac{b-2ac}{2b+2c}\right)+\left(3a-\frac{3acx-b}{bx+cx}\right)=\frac{2ab+b}{2b+2c}+\frac{3abx+b}{bx+cx}$

$=\frac{2abx+bx+6abx+2b}{2x(b+c)}=\frac{b(8ax+x+2)}{2x(b+c)}$.

4) $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)-\left(\frac{a-b}{2a+2b}\right)=\frac{2a^2+4ab+2b^2-(a^2-2ab+b^2)}{2a^2-2b^2}$

$=\frac{a^2+6ab+b^2}{2a^2-2b^2}$.

5) $\frac{3b-2a}{2a+2b}+\frac{c-a}{a+c}-\left(1+\frac{a^2-ac-bc}{a^2+(b+c)a+bc}\right)$.

Das letzte Glied ist $=\frac{a^2+ab+ac+bc+a^2-ac-bc}{a^2+ab+ac+bc}=\frac{2a^2+ab}{(a+b)(a+c)}$.

Generalnenner: $2(a+b)(a+c)$; die gegebenen Größen

$=\frac{(3b-2a)(a+c)+2(c-a)(a+b)-2(2a^2+ab)}{2(a+c)(a+b)}$

$=\frac{5bc-ab-8a^2}{2(a+c)(a+b)}$.

II. Multiplikation.

§. 56.

1) Brüche werden mit Brüchen multiplizirt, wenn man Zähler mit Zähler, und Nenner mit Nenner multiplizirt. Denn $\frac{a}{b}$ mit $\frac{n}{m}$ multipliziren heißt, den mten Theil von $\frac{a}{b}$... nmal nehmen, also $\frac{a}{b}$ mit m dividiren, und den dadurch erhaltenen Quotus mit n multipliziren: also $\frac{a}{b} \times \frac{n}{m} = \frac{a}{b.m} \times n = \frac{a.n}{b.m}$.

In diesem Produkte kann auch b in Verbindung mit n, und a in Verbindung mit m verkleinert werden.

2) Gemischte Faktoren verwandelt man vorher in bloße Brüche.

3) Sind die Faktoren Polynomien von Brüchen, so bringt man gewöhnlich vorher die zusammengehörigen Brüche unter einerlei Nenner.

Beispiele mit Auflösung.

1) $\frac{4a}{a^2-b^2} \times (a+b) = \frac{4a}{a-b}$.

2) $\frac{4a-b}{x^2-x-42} \times (2x+12) = \frac{(4a-b).2(x+6)}{(x-7)(x+6)} = \frac{8a-2b}{x-7}$.

3) $\frac{4x^2}{9ab} \times \frac{3a}{4x} = \frac{x}{3b}$.

4) $\left(1+\frac{y}{x}\right) \times \left(1+\frac{y^2}{x^2-y^2}\right) = \frac{x+y}{x} \times \frac{x^2-y^2+y^2}{x^2-y^2}$

$= \frac{x+y}{x} \times \frac{xx}{(x+y)(x-y)} = \frac{x}{x-y}$.

5) $\left(\frac{a}{n^2}-\frac{a}{m^2}\right) \cdot \frac{mn}{a} \cdot \left(\frac{b}{m-n}+\frac{a}{m+n}\right)$

$= \frac{am^2-an^2}{m^2n^2} \times \frac{mn}{a} \times \frac{b(m+n)+c(m-n)}{(m-n)(m+n)}$

$= \frac{a(m+n)(m-n)}{mn.a} \times \frac{b(m+n)+c(m-n)}{(m-n)(m+n)}$

$= \frac{b(m+n)+c(m-n)}{mn}$.

III. Division.

§. 57.

1) Ein Bruch $\frac{a}{b}$ wird durch einen andern $\frac{n}{m}$ dividirt, wenn man den Divisor umstürzt, und dann multiplizirt, also $\frac{a}{b} : \frac{n}{m} = \frac{a}{b} \times \frac{m}{n} = \frac{am}{bn}$. Denn multiplizirt man diesen Quotus mit dem Divisor, so erhält man das Dividend wieder: $\frac{am}{bn} \times \frac{n}{m} = \frac{a}{b}$. (§. 34).

* Auf das nämliche Resultat kommt man auch nach der Regel: man bringe Dividend und Divisor auf gleiche Nenner, und dividire den Zähler des Dividends durch den Zähler des Divisors. Es soll nämlich durch die Division bestimmt werden, wie oft die (Bruchs-) Einheiten des Divisors in denen des Dividends enthalten sind, was Gleichartigkeit d. i. gleiche Nenner des Dividends und Divisors voraussetzt. Haben diese die bezeichnete Beschaffenheit, so werden nur die Zähler, welche die Anzahl der gleichartigen Bruchseinheiten ausdrücken, durch einander dividirt. Vgl. I. Th. §. 58.

2) Sind Dividend und Divisor gemischte Größen, so verwandelt man vorher die Ganzen in Brüche mit den Nennern der angehängten Brüche.

3) Sind Dividend und Divisor Polynomien, so kann man entweder beide einzeln unter einerlei Nenner bringen und nach 1°. verfahren, oder die Division wie bei Ganzen (§. 36. V.) verrichten.

§. 58.

Beispiele der Division und Auflösung.

1) $\frac{a-b}{(a+b)^2} : (a+b) = \frac{a-b}{a+b}$ (§. 51).

2) $\left(a - \frac{ab-c}{b+c}\right) : 4ac = \frac{ab+ac-(ab-c)}{b+c} : 4ac = \frac{ac+c}{4ac(b+c)} = \frac{a+1}{4a(b+c)}$.

3) $\left(2 - \frac{2y^2}{x^2}\right) : \left(1 + \frac{y}{x}\right) = \frac{2x^2-2y^2}{x^2} : \frac{x-y}{x} = \frac{2(x+y)}{x}$.

4) $\left(\frac{m^4}{n^2}-\frac{2m^2}{n}+m^2\right):\left(\frac{m^2}{n}-m\right)=\frac{m^4-2m^2n+m^2n^2}{n^2}:\frac{m^2-mn}{n}$

$$=\frac{m^4-2m^2n+m^2n^2}{n(m^2-mn)}=\frac{(m^2-mn)(m^2-mn)}{n(m^2-mn)}=\frac{m^2}{n}-m.$$

5) $\left(\frac{a^3}{b^3}-\frac{a}{b}+1-\frac{2b}{a}+\frac{b^2}{a^2}\right):\left(\frac{a^2}{b^2}-\frac{a}{b}+1-\frac{b}{a}\right).$

Dividirt man nach §. 36. V:

$$\frac{a^3}{b^3}-\frac{a}{b}+1-\frac{2b}{a}+\frac{b^2}{a^2} \;\Big|\; \frac{a^2}{b^2}-\frac{a}{b}+1-\frac{b}{a}$$

$$\left(\frac{a^2}{b^2}-\frac{a}{b}+1-\frac{b}{a}\right) \qquad b$$

$$\frac{a^3}{b^3}-\frac{a^2}{b^2}+\frac{a}{b}-1$$

$$-\quad+\quad-\quad+$$

$$\frac{a^2}{b^2}-\frac{2a}{b}+2-\frac{2b}{a}$$

$$\left(\frac{a^2}{b^2}-\frac{a}{b}+1-\frac{b}{a}\right)$$

$$-\quad+\quad-\quad+$$

$$-\frac{a}{b}+1-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}$$

$$\left(\frac{a^2}{b^2}-\frac{a}{b}+1-\frac{b}{a}\right)$$

$$-\frac{a}{b}+1-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}$$

$$+\quad-\quad+\quad-$$

$$\phi$$

§. 59.

Gebrochene Brüche, d. i. Brüche, in deren Zähler und Nenner selbst Brüche vorkommen, werden auf einfache dadurch reduzirt, daß man den Hauptzähler durch den Hauptnenner dividirt.

Beispiele.

1) $\dfrac{\frac{n}{m}+\frac{m}{n}}{\frac{n}{mn}+1}=\dfrac{n^2+m^2}{mn}:\dfrac{n+mn}{mn}=\dfrac{n^2+m^2}{n+mn}$

2) $\dfrac{a+b-\frac{c(a+c)}{a+c}}{2a} = \dfrac{a^2+ab+ac+bc-ac-bc}{a+c} : 2a = \dfrac{a+b}{2(a+c)}$

3) $\dfrac{\frac{a(b+c)}{3} - \frac{ab(b+c)}{b-c}}{b+c} = \dfrac{a}{3} - \dfrac{ab}{b-c} = \dfrac{ab-ac-3ab}{3b-3c}$

$$= \frac{-ac-2ab}{3b-3c} \begin{matrix}\times -1\\ \times -1\end{matrix} = \tfrac{1}{3}a \cdot \frac{c+2b}{c-b}.$$

§. 60.

Durch die bisherigen Vorkenntnisse ist man in den Stand gesetzt, den Quotus aus solchen Divisionen zusammengesetzter Größen annäherungsweise zu finden, welche nicht rein aufgehen.

Ein Beispiel soll hier die Stelle vieler Regeln vertreten.

$$\frac{4a^3b^2+6a^2b^3+7ab^4}{2a^2b-ab^2-\frac{1}{2}b^3} = 2ab+4b^2+\frac{6b^3}{a}+\frac{4b^4}{a^2}+\ldots$$

Operation. $4a^3b^2+6a^2b^3+7ab^4 \;\big|\; 2ab+4b^2+\frac{6b^3}{a}+\frac{4b^4}{a^2}+\ldots$

$(2a^2b-ab^2-\frac{1}{2}b^3)$ b

$4a^3b^2-2a^2b^3-ab^4$

$- \quad + \quad +$

$8a^2b^3+8ab^4$

$(2a^2b-ab^2-\frac{1}{2}b^3)$

$8a^2b^3-4ab^4-2b^5)$

$- \quad + \quad +$

$12ab^4+2b^5$

$(2a^2b-ab^2-\frac{1}{2}b^3)$

$12ab^4-6b^5-\frac{3b^6}{a}$

$- \quad + \quad +$

$8b^5+\frac{3b^6}{a}$

$(2a^2b-ab^2-\frac{1}{2}b^3)$

$8b^5-\frac{4b^6}{a}-\frac{2b^7}{a^2}$

$- \quad + \quad +$

$\frac{7b^6}{a}+\frac{2b^7}{a^2}$ Rest.

Wollte man den Quotienten vollständig erhalten, so müßte zu den oben erhaltenen Gliedern noch $\frac{\frac{7b^6}{a} + \frac{2b^7}{a^2}}{2a^2b - ab^2 - \frac{1}{2}b^3}$ addirt werden. Um die Probe zu machen, müßte zum Produkte aus dem Quotienten in den Divisor der Rest addirt werden.

Anmerkung. Wie man bei solchen Divisionen sich mit Vortheil der negativen Exponenten bedienen, und einen Bruch, dessen Nenner ein Binomium ist, in eine unendliche Reihe verwandeln könne, wird bei der Potenzenlehre gezeigt werden.

Dritter Artikel.

Kettenbrüche.

§. 61.

Einen Kettenbruch erhält man aus einem gegebenen gemeinen Bruche $\frac{n}{m}$, (vorausgesetzt, daß dieser ein ächter Bruch ist; aus einem unächten müßten vorher die Ganzen gezogen werden), wenn man den Nenner m durch den Zähler n, diesen durch den gebliebenen Rest dividirt, und so immer den vorigen Divisor zum Dividend, und den zuletzt erhaltenen Rest zum Divisor macht. (Vergl. I. Th. §. 79—82).

Die Quotienten seyen: a, b, c, d, e, f..., so ist die allgemeine Form eines Kettenbruches:

$$\frac{n}{m} = \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{e + \frac{1}{f + \text{etc.}}}}}}}$$

§. 62.

Die Näherungswerthe erhält man, wenn man die Brüche $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a + \frac{1}{b}}$, $\frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}}$ etc. in einfache verwandelt.

Darnach ist der erste Näherungswerth $= \frac{1}{a}$;

der zweite $= \frac{1}{a+\frac{1}{b}} = \frac{1}{\left(\frac{ab+1}{b}\right)} = \frac{b}{ab+1}$;

der dritte $= \frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}} = \frac{1}{a+\frac{1}{\left(\frac{bc+1}{c}\right)}} = \frac{1}{a+\frac{c}{bc+1}} = \frac{1}{\left(\frac{abc+a+c}{bc+1}\right)} = \frac{bc+1}{abc+c+a}$.

u. s. w.

Bezeichnet man den ersten, zweiten, dritten ꝛc. Näherungswerth mit $\frac{Z_1}{N_1}, \frac{Z_2}{N_2}, \frac{Z_3}{N_3} \ldots$, — wo die am Ende unten angehängten Zahlen 1, 2, 3 .... die Ordnungsstellen der Zähler und Nenner der Näherungswerthe ausdrücken, und Zeiger heißen —, und vergleicht die Näherungswerthe mit einander, so ist

$$\frac{Z_1}{N_1} = \frac{1}{a} \qquad \frac{Z_2}{N_2} = \frac{1.b}{ab+1} = \frac{Z_1 : b}{N_1 . b+1}$$

$$\frac{Z_3}{N_3} = \frac{bc+1}{(ab+1)c+a} = \frac{Z_2 . c + Z_1}{N_2 . c + N_1}$$

$$\frac{Z_4}{N^4} = \frac{(bc+1)d+b}{(abc+c+a)d+ab+1} = \frac{Z_3 . d + Z_2}{N_3 . d + N_2}$$

$$\frac{Z_5}{N^5} = \frac{(bcd+d+b)e+bc+1}{(abcd+cd+ad+ab+1)e+abc+c+a} = \frac{Z_4 . e + Z_3}{N_4 . e + N_3}$$ u. s. w.

Darauf beruht die in §. 81 des I. Th. gegebene Regel, daß man jeden folgenden Näherungswerth erhalte, wenn man Zähler und Nenner des zunächst vorhergehenden Näherungswerthes mit dem treffenden Quotienten multiplizirt, und dann zu Zähler und Nenner des vorletzten Bruches addirt. Um nach dieser Regel auch den zweiten Näherungswerth zu erhalten, wird voraus der Bruch $\frac{0}{1}$ geschrieben.

Beispiel. Man bestimme mittelst eines Kettenbruches die Näherungswerthe von dem Dezimalbruche 1,414213 ...., welches $= \sqrt{2}$, d. i. jene Zahl ist, die mit sich multiplizirt 2 zum Produkte gibt.

Auflösung. Man behandle den Bruch $\frac{414213}{1000000}$ so, als wollte man den größten gemeinschaftlichen Theiler für Zähler

und Nenner suchen (I. Th. §. 49); die Quotienten sind dann:
$a=2,\ b=2,\ c=2,\ d=2,\ e=2,\ f=2,\ g=3,\ldots$

$$\frac{0}{1}\Big|\frac{a=2,\qquad b=2,\qquad c=2}{\frac{Z_1}{N_1}=\frac{1}{2},\ \frac{Z_1.b}{N_1.b+1}=\frac{2.1}{2.2+1}=\frac{2}{5},\ \frac{Z_2.c+Z_1}{N_2.c+N_1}=\frac{2.2+1}{5.2+2}=\frac{5}{12}\ldots}$$

Mithin 1,414213 annähernd $=1\frac{1}{2}$, $=1\frac{2}{5}$, $=1\frac{5}{12}$ u. s. w.

§. 63.

Folgesätze.

I. $\frac{Z_1}{N_1}>\frac{n}{m}$, weil der Nenner zu klein genommen ist, indem $\frac{1}{b+\frac{1}{c}\ldots}$ hinweggelassen ist; dagegen $\frac{Z_2}{N_2}<\frac{n}{m}$, weil der Nenner zu groß genommen ist, indem der letzte Bruch $\frac{1}{b}>\frac{1}{b+\frac{1}{c}\ldots}$ ist;

$\frac{Z_3}{N_3}>\frac{n}{m}$, weil dessen Nenner zu klein ist, indem $c<c+\frac{1}{d..}$,

also $\frac{1}{c}>\frac{1}{c+\frac{1}{d..}}$, so auch $b+\frac{1}{c}>b+\frac{1}{c+\frac{1}{d..}}$, daher $\frac{1}{b+\frac{1}{c}}<\frac{1}{b+\frac{1}{c+\frac{1}{d..}}}$,

mithin $a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}<a+\frac{1}{b+\frac{1}{c+\frac{1}{d}\ldots}}$ und $\frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c}}}>\frac{1}{a+\frac{1}{b+\frac{1}{c+\frac{1}{d}\ldots}}}$

Eben so läßt sich zeigen, daß $\frac{Z_4}{N_4}<\frac{n}{m}$, $\frac{Z_5}{N_5}>\frac{n}{m}\ldots$, daß überhaupt alle Näherungswerthe mit geradem Zeiger kleiner, mit ungeradem größer sind, als der gegebene Bruch.

II. Es ist $Z_1N_2=Z_1(N_1b+1)=Z_1N_1b+Z_1$; subtrahirt man

davon $\underline{}\ Z_2N_1=\underline{}\ Z_1bN_1$

1) $Z_1N_2-Z_2N_1=Z_1=+1$

Ebenso $Z_2N_3=Z_2(N_2c+N_1)=Z_2N_2c+Z_2N_1$

$\underline{}\ Z_3N_2=(Z_2c+Z_1)N_2=\underline{=}\ Z_2N_2c\underline{+}Z_1N_2$

2) $Z_2N_3-Z_3N_2=Z_2N_1-Z_1N_2=-(Z_1N_2-Z_2N_1)=-1.$

3) In

3) In gleicher Art $Z_3N_4 - Z_4N_3 = +1$; auch andere ähnliche Unterschiede zwischen den Produkten von Zählern und Nennern zweier sich unmittelbar folgenden Näherungswerthen sind $= \pm 1$, und zwar $= +1$, wenn der Zeiger des vorhergehenden Näherungswerthes, wie in 1°) und 3°) ungerade ist, $= -1$, wenn der Zeiger eine gerade Zahl ist.

III. $$\frac{Z_1}{N_1} - \frac{Z_2}{N_2} = \frac{Z_1N_2 - Z_2N_1}{N_1N_2} = + \frac{1}{N_1N_2}$$

$$\frac{Z_2}{N_2} - \frac{Z_3}{N_3} = \frac{Z_2N_3 - Z_3N_2}{N_2N_3} = - \frac{1}{N_2N_3}$$ u. s. w.

Da die Nenner der Näherungswerthe, also auch die Produkte der Nenner von zwei aufeinanderfolgenden immer größer, mithin jene Differenzen immer kleiner werden, so folgt daraus, daß zwischen zwei Näherungswerthen der Unterschied immer kleiner werden, und bei einem endlichen Kettenbrüche zuletzt verschwinden müsse.

IV. Jeder Bruch $\frac{z}{n}$, welcher dem gegebenen näher kommen soll, als ein nach Obigem gefundener Näherungswerth $\frac{Z_r}{N_r}$, hat einen größern Nenner, erscheint also in größerer Form als $\frac{Z_r}{N_r}$.

Denn der nächst vorhergehende Näherungswerth sey $\frac{Z_m}{N_m} > \frac{Z_r}{N_r}$, so muß $\frac{Z_m}{N_m}$ auch $> \frac{z}{n}$, $\frac{z}{n} > \frac{Z_r}{N_r}$, und $\frac{Z_m}{N_m} - \frac{z}{n} < \frac{Z_m}{N_m} - \frac{Z_r}{N_r}$ oder $\frac{Z_m.n - N_m.z}{N_m.n} < \frac{1}{N_m.N_r}$ seyn. Setzt man $Z_mn - N_mz = a$, so ist $\frac{a}{N_mn} < \frac{1}{N_m.N_r}$ oder nach §. 40. VI. $\frac{a}{n} < \frac{1}{N_r}$, und $\frac{1}{n} < \frac{1}{N_r.a}$; folglich $n > N_ra$, um so mehr also $n > N_r$.

III. Hauptstück.

Lehre von der Syntaktik, d. i. Verbindung der Größen, oder: von den Permutationen, Kombinationen und Variationen.

Da die Lehre von den Permutationen in der Würdenlehre ihre Anwendung findet, so müssen sie hier, nebst den mit ihnen zusammenhängenden Kombinationen und Variationen, ganz kurz behandelt werden.

Vorbegriffe.

§. 64.

1) Eine Zusammenstellung von mehreren Dingen (die wir Elemente nennen wollen) nach gewissen Gesetzen, heißt eine Syntaxis; und jener Theil der Mathematik, welcher diese Gesetze bestimmt, wird die Lehre von der Syntaktik oder Verbindung der Größen genannt.

2) Die zusammengestellten Elemente können Personen, Zahlen, Buchstaben, Wörter, Farben, oder eigentliche mathematische Größen seyn, und ihre Anzahl sowohl, als die Bedingung ihrer Verbindung muß (z. B. durch Ziffern oder andere Zeichen) genau bestimmt werden.

3) Mehrere Elemente miteinander verbunden heißen eine Komplexion; z. B. aa, bb, cc,
ab, abc, aabbcd sind Komplexionen.

4) Sind alle Elemente verschieden, so hat man Komplexionen ohne Wiederholung, z. B. a b c d,
f g h l.
Kommen aber unter den gegebenen Elementen eines oder mehrere öfter vor, so entstehen daraus Komplexionen mit Wiederholungen; z. B. aa bb cc ddd,
1. 2. 2. 3. 4. 4.

5) Wenn ein Buchstabe unmittelbar mehrmal nacheinander stehen soll, kann er der Kürze wegen nur einmal gesetzt werden mit einer zur Rechten obengesetzten Ziffer, welche anzeigt, wie oft er stehen soll. Diese Ziffer heißt der Wiederholungs-Exponent; z. B. aabbbccccd = $a^2b^3c^4d$.

6) Wenn in einer Komplexion die Buchstaben nach der Ordnung des Alphabets, oder die Zahlziffern nach ihrer wachsenden Quantität gereihet sind, z. B.
a b c d e,
m n o p q,
r s t u v x y,
1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.
so heißen sie wohlgeordnete Komplexionen. Jede andere, z. B. c b d a, 1. 4. 3. 2, heißt eine schlechtgeordnete.

7) Nach der Anzahl der zusammengestellten Elemente werden verschiedene Klassen der Elemente unterschieden, und sind folgende:

Erste Klasse — Unionen, wenn von den gegebenen Elementen immer nur ein einzelnes für sich allein gesetzt wird; z. B. a oder b.

Zweite Klasse — Binionen (auch Amben genannt), d. i. Zusammenstellungen von je zwei Elementen.

Dritte Klasse — Ternionen, Zusammenstellungen von je drei Elementen.

Vierte Klasse — Quaternionen, Zusammenstellungen von je vier Elementen.

Fünfte Klasse — Quinionen, Zusammenstellungen von je fünf Elementen.

Sechste Klasse — Senionen, Zusammenstellungen von je sechs Elementen u. s. w.

Z. B:	a,	oder	b,
	a b,		b b,
	a b c,		b b b,
	a b c d,		b b b b,
	a b c d e,		b b b b b,
	a b c d e f.		b b b b b b.

8) Die Klassen werden wieder in Ordnungen getheilt, und zwar nach den Anfangsbuchstaben der darin enthaltenen Komplexion; so gehören

aa, ab, ac zur ersten Ordnung in der zweiten Klasse,
abc, acb, abd — — — — — dritten —
bbb, bbc, bcd — zweiten — — — — —

9) Die Unterordnungen werden durch die Buchstaben bestimmt, welche zunächst auf den ersten folgen; z. B.

a b c d e
a b c e d
a b e c d
a b d c e
a b d e c

} gehören zur Unterordnung a b in der fünften Klasse, erster Ordnung.

10) Komplexionen sind entweder identische, wenn sie gleich viele und dieselben Elemente in derselben Ordnung enthalten; oder sie sind materiell verschiedene, wenn darin nicht gleich viele, oder nicht dieselben Elemente vorkommen; oder endlich

bloß formell verschiedene, wenn darin gleichviele und dieselben Elemente nur in verschiedener Aufeinanderfolge enthalten sind. Also

abcd, abcd sind identische,

abc, abcd
aaa, aab
abb, bbb
} sind materiell verschiedene,

abcd, abdc
acbd, acdb
adbc, adcb
} nur formell verschiedene Komplexionen.

11) Endlich heißen zwei oder mehrere Komplexionen gleichartige, wenn in jeder derselben zwar nicht die nämlichen, aber doch gleichviele Elemente, und mit einerlei Wiederholungen vorkommen; widrigenfalls heißen sie ungleichartige; z. B.

abb, acc, add sind gleichartige unter sich,
aabcdd, abbccd, abccdd — ebenfalls drei gleichartige,
abc, aab, bcdd sind ungleichartige Komplexionen.

12) Soll in einer Komplexion jeder Buchstabe eine bestimmte Zahl bedeuten, so wird dieselbe in Beziehung auf die Summe aller in ihr enthaltenen Zahlen eine Komplexion zu dieser Summe genannt. Z. B.

1, 2, 3, 4, 5, 6 = 21.
a, b, c, d, e, f.

Zu dieser Absicht muß aber über oder unter jedes gegebene Element die dazu gehörige Zahl geschrieben, und das Ganze eingeklammert werden; z. B.

$$\left[\begin{matrix} 3. & 4. & 5. & 6. & 7. \\ a. & b. & c. & d. & e. \end{matrix}\right]$$

Eine solche Figur heißt ein syntaktischer Zeiger.

13) Mit der Darstellung und Entwickelung der Komplexionen jeder Art aus einer gegebenen Anzahl von Elementen beschäftiget sich nun die Syntaktik; und ihre Grundoperationen sind: das Permutiren, Kombiniren und Variiren.

Erster Artikel.

Von dem Permutiren.

§. 65.

1) Die gegebenen Elemente einer Komplexion **permutiren** heißt: dieselben so oft untereinander versetzen, oder ihre Stellen verwechseln, daß die Komplexion in jeder möglichen Form dargestellt wird. — Man erhält also durch die Permutation nur **formell verschiedene Komplexionen.**

2) Die Anzahl der möglichen Verwechslungen, welche mit einer gegebenen Anzahl von Elementen vorgenommen werden können, wird ihre **Permutations-Zahl** genannt, und mit n bezeichnet. — So versteht man unter nP(a, b, c, d) die Permutations-Zahl der Elemente a, b, c, d; und unter P(a, b, c, d), daß diese Elemente permutirt werden sollen.

3) **Aufgabe.** Die Elemente (a, b, c, d) zu permutiren, oder die bloß formell verschiedenen möglichen Komplexionen von P(a, b, c, d) darzustellen.

Auflösung. Man versetzt die gegebenen Elemente (welche als Komplexionen von je vieren zur Klasse der **Quaternionen** gehören) nach den vier **Ordnungen** a, b, c, d, d. i. macht diese nach und nach zu den Anfangsbuchstaben der Reihe (cf. §. praec. 8°); aus den Ordnungen entwickelt man die **Unterordnungen**, in denen auch die Buchstaben nach dem Anfangsbuchstaben gleich sind. — Erhält man die Ordnung verkehrt, wie sie gegeben wurde (also hier d c b a), so hat man alle möglichen Permutations-Komplexionen erschöpft.

Also P(a, b, c, d).

Ordnung a	a b c d a b d c	U.Ordn. ab	Ordnung b	b a c d b a d c	U.Ordn. ba
	a c b d a c d b	— ac		b c a d b c d a	— bc
	a d b c a d c b	— ad		b d a c b d c a	— bd

Ordnung c	cabd cadb	U Ordn. ca	Ordnung d	dabc dacb	U. Ordn. da
	cbad cbda	— cb		dbac dbca	— db
	cdab cdba	— cd		dcab dcba	— dc

4) Aufgabe. P (a, bb, cc).

Auflösung.

Ordnung a	abbcc abcbc abccb	Unter-Ordnung ab			
	acbbc acbcb accbb	— — ac			
Ordnung b	babcc bacbc baccb	U. O. ba	Ordnung c	cabbc cabcb cacbb	U. O. ca
	bbacc bbcac bbcca	U. O. bb		cbabc cbacb cbbac cbbca cbcab cbcba	U. O. cb
	bcabc bcacb bcbac bcbca bccab bccba	U. O. bc		ccabb ccbab ccbba	U. O. cc

5) Aufgabe. Man permutire das Wort Roma nach den Ordnungen R, o, m, a, und nach den Unterordnungen ro, rm, ra | or, om, oa | mr, mo, ma | ar, ao, am | zur Uebung!

§. 66.

Ueber das Permutiren lassen sich folgende Hauptsätze aufstellen:

I. Sind von m zu permutirenden Elementen alle verschieden, so gibt es 1. 2. 3. 4. . . (m — 1)m Permutationen. — Der Beweis wird durch Induktion geführt.

1°. Ein Element (a) läßt sich nur einmal permutiren; nP (a) = 1.

2°. Zwei verschiedene Elemente (a, b) lassen sich zweimal permutiren, ab, ba; also nP (a, b) = 1. 2.

3°. Drei verschiedene Elemente (a, b, c) lassen sich sechsmal permutiren:

abc bac cab
acb bca cba | also nP(a, b, c) = 1. 2. 3.

4°. Vier verschiedene Elemente (a, b, c, d) lassen sich 1.2.3.4 = 24 Mal permutiren; denn da jedes Element wieder den ersten Platz einnehmen kann (abcd, bacd, cabd, dabc), und überdieß die drei letzten Elemente jedes Mal sechs Permutationen zulassen, so ergeben sich 4 X 6 = 24 Permutationen, (sie sind in der Aufgabe 3 §. praec. entwickelt). Also nP (a, b, c, d) = 1.2.3.4.

5°. Um also die Permutationen von 5 verschiedenen Elementen zu erhalten, darf ich nur die Permutationen von 4 Elementen noch mit 5 multipliziren. Folglich:

6°. Um die Permutationen von m Elementen zu erfahren, muß ich die Permutationen von (m — 1) Elementen noch durch m multipliziren.

1. Zusatz.

5 verschiedene Elemente geben				1.2.3.4.5 = 120	Permutationen
6	—	—	—	1.2.3.4.5.6 = 720	
7	—	—	—	1.2.3.4.5.6.7 = 5040	
8	—	—	—	1.2.3.4.5.6.7.8 = 40.320	
9	—	—	—	1.2.3.4.5.6.7.8.9 = 362.880	
10	—	—	—	362.880 X 10 = 3'628800	

m Elemente geben = 1.2.3.4...(m — 1) m Permutationen.

2. Zusatz. Die 24 Buchstaben des Alphabets lassen sich 1.2.3.4.5.....21.22.23.24 Mal =

620.448'''401.733''239.439'360,000 Mal permutiren.

II. Sind von den zu permutirenden Elementen einige gleich (einerlei), so vermindert sich die Anzahl der Permutationen.

bei zwei gleichen Elementen um das Doppelte (1.2fache),
bei drei gleichen Elementen um das Sechsfache (1.2.3fache),
bei vier gleichen Elementen um das 24 (1.2.3.4 fache).

1. Also geben 4 gleiche Größen, z. B. aaaa oder a^4, nur eine $\left(\frac{1.2.3.4}{1.2.3.4}\right)$ Permutation, da sie, als verschieden, 24 gegeben haben würden.

2. Die möglichen Permutationen von abbcc, oder nP (ab^2c^2)

$= \frac{1.2.3.4.5}{1.2.1.2} = 2.3.5 = 30.$

* Diese 30 möglichen Permutationen sind §. praec. Aufgabe 4. entwickelt zu sehen.

3. Im Falle also, daß ein oder mehrere Elemente öfter vorkommen, findet man die Anzahl der möglichen Permutationen, wenn man die Summe der Permutationen, welche die gegebenen Elemente alle geben würden, wenn sie verschieden wären, durch das Produkt jener Permutationen dividirt, welche die einzelnen gleichen Elemente zusammen leiden würden, wenn sie ebenfalls verschieden wären.

* Zur Erklärung diene das eben gegebene Beispiel nP(abbcc). Wären diese fünf Elemente ganz verschieden, so ergäben sich 1.2.3.4.5 = 120 Permutationen.

Nun sind von diesen Elementen zwei Paare (bb, cc) einerlei. Zwei verschiedene Elemente geben 1. 2. Permutationen, mithin zwei Paare = 2×2 Permutationen (jedes Paar für sich allein betrachtet). Um dieses 2×2 = 4fache vermindert sich die Anzahl der Permutationen von nP (a, b, b c, c); mithin $\frac{1.2.3.4.5}{1.2.1.2} = \frac{120}{4}$ = 30.

Beispiele: I. In dem Worte amamus lassen sich die Buchstaben $\frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.1.2}$ = 180 Mal versetzen.

II. $nP(a^4b^2) = nP(a, a, a, a, b, b) = 35.$

III. $nP(a^3b^4c^2) = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9}{1.2.3.1.2.3.4.1.2} = 1260.$

Anmerkung. Durch die bisher aufgestellten zwei Sätze werden die Permutationssummen für jene ganz oder zum Theil verschiedene Elemente gefunden, welche alle der Versetzung unterworfen sind, d. i. keinen festen, unveränderlichen Sitz haben. Es können aber die Bedingnisse der Aufgabe von der Art seyn, daß ein oder mehrere Elemente unveränderlich bleiben, d. i. immer einen und denselben Platz behalten sollen. Wir erklären es durch Beispiele:

1. In P(x, a, b, c, d) soll x immer einen bestimmten Platz behaupten, z. B. den ersten, oder den mittlern, oder den letzten).— In solchem Falle vermindert sich die Zahl der Permutationen um jenes Vielfache, um welches die unveränderlichen Elemente, wären sie veränderlich gewesen, die Permutabilität der veränderlichen würden vermehrt haben, d. i. man betrachtet die unveränderlichen Elemente als gar nicht gegeben. — Im vorliegenden

Beispiele geben a, b, c, d nur 1. 2. 3. 4 = 24 Permutationen; das fünfte Element, wäre es veränderlich, gäbe das Fünffache von 24, d. i. 1. 2. 3. 4. 5 = 120; folglich muß, da x unveränderlich ist, die Zahl der Permutationen $nP(x^4, a, b, c, d) = \frac{1.2.3.4.5}{5}$ = 24 seyn.

2. In der Komplexion nP(x, y, z, a, b, c, d) seyen x, y, z zwar unter sich, nicht, aber mit den übrigen Größen permutabel, so daß die Größen x, y, z immer die ersten Plätze jeder Ordnung und Unterordnung einnehmen müssen, während a, b, c, d unter sich permutabel sind. —

Auflösung. xyz unter sich geben 1.2.3 Permutationen;
a, b, c, d — — — 1.2.3.4

folglich, da jede der 24 Komplexionen von abcd mit einer der sechs möglichen Komplexionen von xyz verbunden werden kann, gibt es 1.2.3 × 1.2.3.4 = 6 × 24 = 144 Permutationen.

3. Sind endlich von den veränderlichen Elementen einige gleich (oder einerlei), so tritt die obige Regel II. auch hier wieder ein. Z. B. Wie oft lassen sich die Größen abc ββγδλλλ versetzen,

a) wenn abc in den drei ersten Stellen ganz unverändert bleiben, und

b) wenn diese drei Größen in denselben drei Stellen unter sich permutabel sind?

Auflösung von a) $\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}{1.2.1.2.3.} \frac{8.9.10}{} = 420$ mal;

von b) $\frac{1.2.3 \times 1.2.3.4.5.6.7}{1.2.} \frac{}{1.2.3} \frac{}{} = 2520$ mal.

Zweiter Artikel.

Von dem Kombiniren.

§. 67.

Vorbegriffe.

1. Unter Kombiniren versteht man jene syntaktische Operation, welche die gutgeordneten Komplexionen darstellt, die entweder überhaupt, oder für eine bestimmte Bedingung aus den gegebenen Elementen gemacht werden können. Z. B. es sollen die Elemente a, b, c untereinander kombinirt werden.

ab, ac, bc | aab, aac |
aa, bb, cc | abb, acc | u. s. w.

Jede solche gutgeordnete Komplexion heißt eine Kombination.

2. So wie man durch das Permutiren bloß alle formell verschiedenen Komplexionen einer gegebenen Anzahl von Elementen darstellt: also werden durch das Kombiniren bloß alle materiell verschiedenen Komplexionen gefunden.

3. Das Kombiniren kann mit oder ohne Wiederholungen geschehen.

a) Stellt man überhaupt alle gutgeordneten Komplexionen dar, welche für eine gegebene Anzahl von Elementen unter der Bedingniß möglich sind, daß kein Element in einer Komplexion öfter als einmal vorkommt, so heißt dieß ein Kombiniren überhaupt ohne Wiederholungen.

b) Werden aber zugleich auch solche gutgeordnete Komplexionen dargestellt, in welchen die einzelnen gegebenen Elemente öfter vorkommen: so nennt man dieses ein Kombiniren überhaupt mit Wiederholungen.

4. Werden bei dem Kombiniren mit oder ohne Wiederholungen die Buchstaben auf gewisse Zahlen bezogen, und nur diejenigen gutgeordneten Komplexionen aufgestellt, deren Elemente eine vorausbestimmte Summe geben: so nennt man dieß ein Kombiniren mit oder ohne Wiederholungen zu einer bestimmten Summe.

5. Aufgabe. Mehrere Elemente, z. B. a, b, c, d, überhaupt ohne Wiederholung zu kombiniren, oder Com. (a, b, c, d).

Auflösung. Man verbinde jedes gegebene Element nur mit den folgenden, die man rechter Hand daran setzt. Man verbinde wieder das letzte Element jeder dreifachen Komplexion mit allen folgenden: eben so das letzte Element jeder dreifachen Komplexion mit allen folgenden Elementen, u. s. w. Auf solche Weise entstehen

die Unionen: a, b, c, d;
— Binionen: ab, ac, ad,
(Amben) bc, bd;
— Ternionen: abc, abd,
acd,
bcd;
— Quaternionen: abcd.

Es ist hier nicht erlaubt, ein Element mit sich selbst zu verbinden, auch werden alle Kombinationen ausgeschlossen, welche sich nur formell (nur der Ordnung der Elemente nach) von den schon vorhandenen unterscheiden.

6. Aufgabe. Mehrere Elemente, z. B. a, b, c, d, überhaupt mit Wiederholungen zu kombiniren, oder C. rep. (a, b, c, d).

Auflösung. Man verbindet jedes gegebene Element mit sich selbst, und mit jedem folgenden, welches man zur Rechten anhängt, so erhält man die Binionen.

Unionen: a, b, c, d;
Binionen: aa, ab, ac, ad,
bb, bc, bd,
cc, cd,
dd.

Verbindet man ferner das letzte Element jeder Binion mit sich selbst, und mit den folgenden Elementen, so erhält man

Ternionen: aaa,aab,aac,aad | bbb,bbc,bbd | ccc,ccd | ddd.
abb,abc,abd | bcc,bcd | cdd
acc,acd | bdd
add

Verbindet man endlich das letzte Element aller Ternionen mit sich selbst, und mit den folgenden Elementen, so erhält man die Quaternionen.

Also 20 Kombinationen von der Ordnung a.

a a a a
a a a b
a a a c
a a a d
a a b b
a a b c
a a b d
a a c c
a a c d
a a d d
a b b b
a b b c
a b b d
a b c c
a b c d
a b d d
a c c c
a c c d
a c d d
a d d d

10 von der Ordnung b.

b b b b
b b b c
b b b d
b b c c
b b c d
b b d d
b c c c
b c c d
b c d d
b d d d

4 v. d. O. c.

c c c c
c c c d
c c d d
c d d d

d d d d, 1 Komb. v. d. Ordn. d.

Summe aller Kompl. = 35.

Anmerkung. Diese vier Klassen der Kombinationen lassen sich kürzer und anschaulicher darstellen in folgender Figur, welche eine Involuzion genannt wird.

a	a	a	a	
a	a	a	b	**Unionen.**
a	a	a	c	
a	a	a	d	
a	a	b	b	
a	a	b	c	
a	a	b	d	
a	a	c	e	**Binionen.**
a	a	c	d	
a	a	d	d	
a	b	b	b	
a	b	b	c	
a	b	b	d	
a	b	c	c	
a	b	c	d	
a	b	d	d	
a	c	c	c	**Ternionen.**
a	c	c	d	
a	c	d	d	
a	d	d	d	
b	b	b	b	
b	b	b	c	
b	b	b	d	
b	b	c	c	
b	b	c	d	
b	b	d	d	
b	c	c	c	
b	c	c	d	
b	c	d	d	
b	d	d	d	
c	c	c	c	**Quaternionen.**
c	c	c	d	
c	c	d	d	
c	d	d	d	
d	d	d	d	

Zusatz.

Bei dieser Kombination mit Wiederholungen ist es erlaubt, jedes Element mit sich selbst zu verbinden; aber die Komplexionen, welche nur formell von den schon gegebenen verschieden sind (also deren Permutationen), bleiben ausgeschlossen.

§. 68.

Um die Anzahl der möglichen Kombinationen einzelner Klassen für das Kombiniren mit oder ohne Wiederholungen zu finden, dienen folgende Lehrsätze.

I. Die Anzahl der möglichen Kombinationen von n Elementen ohne Wiederholungen für die mte Kombinationsklasse ist $= \frac{n.(n-1).(n-2)...(n-[m-1])}{1. \quad 2. \quad 3. \quad (m-1).m}$.

Beweis. Verbindet man von n Elementen jedes mit allen übrigen, nur nicht mit sich selbst, so erhält man $n.(n-1)$ Kombinationen der zweiten Klasse, d. i. Binionen (Amben). Da diese aber alle doppelt (jedes Paar permutirt) vorkommen, z. B. ab und ba, bc und cb; so muß man diese Summe, oder resp. dieses Produkt noch dividiren durch $2 = 1.2$; also $\frac{n.(n-1)}{1.2} =$ Anzahl der Binionen (Amben). Verbindet man diese Kombinationen nach zweien noch weiter mit allen gegebenen Elementen, nur nicht mit den beiden schon darin enthaltenen, so erhält man $\frac{n(n-1)(n-2)}{1. \quad 2}$ Kombinationen nach diesen. Da aber darunter jede Kombination dreimal permutirt vorkommt (abc, acb, cba), so muß man wieder mit 3 dividiren; also $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \quad 2 \quad 3} =$ Anzahl der Ternionen. Und so kann der Beweis weiter fortgesetzt werden. Man sieht aber, daß dieses Verfahren nicht in's Unendliche gehen könne, sondern daß man aufhören müsse, wenn die obere Reihe (das Dividend) der untern (dem Divisor) gleich geworden ist.

Anmerkung. In dieser Formel bezeichnet m, als wandelbare Größe, die Zahl der Kombinationsklasse, gilt also für die Unionen 1, für die Binionen 2, für die Ternionen 3, für die Quaternionen 4, für die Quinionen 5.

1) Die Richtigkeit der aufgestellten Formel kann durch folgende Beispiele geprüft werden.

a) Ein Element gilt keine Binion (keine Ambe),

$$\frac{1.(1-1)}{1.2 \ldots} = 0.$$

b) Zwei Elemente geben nur eine Binion, und keine Ternion.

$$\frac{2.1}{1.2} = 1 \text{ Binion.}$$

$$\frac{2.1.(1-1)}{1.2.\ 3} = 0 \text{ Ternion.}$$

c) Drei Elemente geben 3 Binionen, und nur 1 Ternion.

$$\frac{3.2}{1.2} = 3 \text{ Binion., z. B. ab, ac, bc.}$$

$$\frac{3.2.1}{1.2.3} = 1 \text{ Ternion, abc.}$$

d) Vier Elemente geben $6 = \frac{4.3}{1.2}$
Fünf — — $10 = \frac{5.4}{1.2}$
Sechs — — $15 = \frac{6.5}{1.2}$
} Binionen oder Amben.

e) Drei Elemente geben $1 = \frac{3.2.1}{1.2.3}$
Vier — — $4 = \frac{4.3.2}{1.2.3}$
Fünf — — $10 = \frac{5.4.3}{1.2.3}$
} Ternionen.

f) Diese Ternionen sind z. B. für die fünf Buchstaben a, b, c, d, e:

abc, abd, abe,	bcd, bce,
acd, ace,	bde,
ade,	cde.

2) Bezeichnet man nach Hindenburg die Anzahl der Unionen von n Elementen mit ${}^{n}\mathfrak{A}$, der Binionen mit ${}^{n}\mathfrak{B}$, der Ternionen mit ${}^{n}\mathfrak{C}$, der Quaternionen mit ${}^{n}\mathfrak{D}$, der Kombination zur mten Klasse mit ${}^{n}\mathfrak{M}$; so ist also

a) ${}^{n}\mathfrak{A} = \frac{n}{1}$ b) ${}^{n}\mathfrak{B} = \frac{n(n-1)}{1.\ 2}$

c) ${}^{n}\mathfrak{C} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}$ d) ${}^{n}\mathfrak{D} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$

e) ${}^{n}\mathfrak{M} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-(m-1))}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ldots\ m}$

3) Ist in der Formel für ${}^{n}\mathfrak{M} \ldots m > n-(m-1)$, so können, da im Zähler die Faktoren um 1 ab-, im Nenner um 1 zunehmen, und $n > m$ ist, — nur den Fall ausgenommen, daß $n = m$ und daher ${}^{n}\mathfrak{M} = 1$ ist —; in jene Lücke des Zählers noch $(m+1).m.(m-1)\ldots$, im Nenner $(n-m).(n-(m-1))\ldots$, als Faktoren gesetzt werden, so daß

$${}^{n}\mathfrak{M} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(m+1).m.(m-1)\ldots(n-(m-1))}{1.2.3\ldots(n-m).(n-(m-1))\ldots m} \ldots\ldots (A$$

Hier sind die letzten Faktoren des Zählers und Nenners in verkehrter Ordnung gleich, und heben sich. Daher wird

$${}^{n}\mathfrak{M} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(m+1)}{1.2.3\ldots(n-m)}$$

Diese Formel wird auch erhalten, wenn man in (A statt $m\ldots n-m$ setzt; folglich ist ${}^{n}\mathfrak{M} =$ der Kombination von n Elementen zur $(n-m)$ten Klasse. Setzt man z. B. $n = 7$, $m = 5$, so ist $n-m = 2$, und ${}^{7}\mathfrak{E} = \frac{7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5} = \frac{7.6}{1.2.} = {}^{7}\mathfrak{B}$

4) Aus $\frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{n}{1} = \frac{(n+1).n}{1.2}$ folgt: ${}^{n}\mathfrak{B} + {}^{n}\mathfrak{A} = {}^{n+1}\mathfrak{B}$; eben so aus $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \frac{n(n-1)}{1.2} = \frac{(n+1).n(n-1)}{1.2.3}$ folgt: ${}^{n}\mathfrak{C} + {}^{n}\mathfrak{B} = {}^{n+1}\mathfrak{C}$.

Allgemein ist ${}^{n}\mathfrak{M} + {}^{n}\bar{\mathfrak{M}}^{1} = {}^{n+1}\mathfrak{M}$, wenn ${}^{n}\bar{\mathfrak{M}}^{1}$ die Anzahl der Kombinationen von n Elementen zu der dem $\mathfrak{M}$ zunächst vorhergehenden Klasse (also zu $m-1$ Gliedern) bezeichnet. Kommt nämlich zu n Elementen, welche zur mten Klasse kombinirt sind, noch ein neues Element, so kann dieses mit jeder Kombination, welche die n Elemente zur $(m-1)$ten Klasse bilden, noch zu einer Kombination der mten Klasse verbunden werden, daß also zu den schon vorhandenen ${}^{n}\mathfrak{M}$ noch so viele neue Kombinationen zur mten Klasse hinzukommen, als ${}^{n}\bar{\mathfrak{M}}^{1}$ beträgt.

5) Da die gewöhnliche Zahlenlotterie 90 Ziffern hat, so sind darin möglich:

a) $\frac{90}{1} = 90$ Extrakte (Unionen).

b) $\frac{90.89}{1.2} = 4005$ Amben.

c) $\frac{90.89.88}{1.\ 2.\ 3.} = 117.480$ Ternionen.

d) $\frac{90.89.88.87}{1.\ 2.\ 3.\ 4} = 2'555.190$ Quaternen.

e) $\frac{90.89.88.87.86}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5} = 43'949.268$ Quinionen.

4) Bei einem Quadrillespiel mit 32 Kartenblättern kann es $\frac{32.31.30.29.28.27.26.25}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8} = 10'518.300$ verschiedene Kombinationen geben.

II. Die Anzahl der möglichen Kombinationen von n Elementen mit Wiederholungen für die mte Kombinationsklasse ist $=$

$$\frac{n.(n+1).(n+2).(n+3).....(n+[m-1])}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ (m-2).(m-1).m}.$$

Beweis. a) n Elemente geben auch n $(= \frac{n}{1})$ Kombinationen zu Eins, d. i. Unionen.

b) Verbindet man jedes Element mit einem jeden der übrigen, und noch einmal mit sich selbst, so entstehen $\frac{n.(n+1)}{1.\ 2}$ Kombinationen nach zweien, oder Binionen. Die Division durch 2 ist nothwendig, weil sonst alle Kombinationen doppelt (permutirt) vorkommen würden.

c) Verbindet man jede Binion mit jedem gegebenen Element, und überdieß mit den beiden, welche ihm selbst zukommen, und nimmt man anstatt der dreifachen permutirten Kombinationen, die sich so ergeben würden, nur den dritten Theil, so entstehen $\frac{n.(n+1).(n+2)}{1.\ 2.\ 3}$ Ternionen.

d) Folglich geben auch n Elemente

$\frac{n.(n+1).(n+2).(n+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$ Quaternionen.

$\frac{n.(n+1).(n+2).(n+3).(n+4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$ Quinionen.

Folglich auch allgemein

$\frac{n.(n+1).(n+2).(n+3).....(n+[m-2]).(n+[m-1])}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ .\ .\ .\ .\ (m-1)\ .\ m}$ Kombinationen der Klasse m.

1) Auch

1) Auch diese Formel läßt sich durch praktische Beispiele prüfen.

a) Ein Element (a) gibt nur eine Union, a.

b) Zwei Elemente (a, b) geben $\frac{2.3}{1.2} = 3$ Binionen mit Wiederholung, aa, ab, bb.

c) Drei Elemente (a, b, c) geben $\frac{3.4.5}{1.2.3} = 10$ solche Ternionen, aaa, bbb, ccc, abc.

d) Vier Elemente (a, b, c, d,) geben

$$\frac{4}{1} = 4 \text{ Unionen,}$$

$$\frac{4.5}{1.2} = 10 \text{ Binionen,}$$

$$\frac{4.5.6}{1.2.3} = 20 \text{ Ternionen,}$$

$$\frac{4.5.6.7}{1.2.3.4} = 35 \text{ Quaternionen.}$$

(Alle diese Kombinationen sind §. praec. in der Aufgabe 6. entwickelt.)

2) Wie viele verschiedene Würfe (ohne Permutation) sind mit drei Würfen möglich?

Antwort. Die Elemente (Augen der Würfel) sind 6, jeder Wurf gibt eine Ternion (mit Wiederholungen). Also $\frac{6.7.8}{1.2.3} = 56$ verschiedene Zahlen oder Würfe, (wobei jedoch kein Würfel bestimmt als der erste oder zweite, dritte gedacht werden darf).

Dritter Artikel.

Vom Variiren.

§. 69.

1) Das Variiren ist diejenige syntaktische Operation, welche aus den gegebenen Elementen alle möglichen gut und schlecht geordneten Komplexionen für eine gewisse Bedingung aufstellt.

2) So wie durch das Permutiren bloß alle formell verschiedenen und durch Kombiniren bloß alle materiell verschiedenen Komplexionen für eine gegebene Anzahl von Elementen gefunden werden; eben so werden durch das Variiren

die formell und materiell verschiedenen Komplexionen dieser Elemente zugleich dargestellt. Die beiden ersten Operationen sind daher in dieser letztern vereiniget.

3) Jede durch das Variiren gefundene Komplexion wird eine Variation genannt, und kann eine gut oder schlecht geordnete seyn.

4) Das Variiren kann, wie das Kombiniren, mit oder ohne Wiederholungen geschehen; auch kann man zu bestimmten Summen variiren.

5) Aufgabe. Mehrere Elemente (a, b, c, d) ohne Wiederholung zu variiren, d. i. Var. (a, b, c, d).

Auflösung. Vier Elemente geben 4 Unionen, a, b, c, d.

Um die Binionen zu erhalten, schreibe man jedem Elemente jedes andere vor, nur nicht das nämliche ihm selbst.

ab, ac, ad ba, bc, bd ca, cb, cd da, db, dc	gibt 4.3 = 12 Binionen.

Um die Ternionen zu erhalten, setze man allen Binionen das Element bei, welches noch nicht darin enthalten ist.

abc, abd, acb, acd, adb, adc bac, bad, bca, bcd, bda, bdc cab, cad, cba, cbd, cda, cdb dab, dac, dba, dbc, dca, dcb	gibt 4.3.2 = 24 Ternionen.

Aus den Ternionen, wenn man jeder das fehlende vierte Element beisetzt, erhält man die Quaternionen.

dabc, cabd, dacb, bacd, cadb, badc dbac, cbad, dbca, abcd, cbda, abdc dcab, bcad, dcba, acdb, bcda, acdb cdab, bdac, cdba, adbc, bdca, adcb	4.3.2.1 = 24 Quaternionen.

6) Aufgabe. Die Anzahl der Variationen jeder Klasse für das Variiren ohne Wiederholungen zu finden.

Auflösung. Man mache ein Produkt von m Faktoren (wenn es nämlich Variationen der m^{ten} Klasse sind), von welchen der erste Faktor der Anzahl der gegebenen Elemente n gleich, und jeder folgende um 1 kleiner ist, als der vorhergehende:

d. h. $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots \times n-(m-1)$.

Beweis. Diese Formel ist analog mit der §. 63. I., aus welcher die Anzahl der möglichen Kombinationen ohne Wiederholungen für die m^{te} Kombinationsklasse gefunden wird. Die dort nothwendigen Divisors-Faktoren müssen hier nothwendig hinwegbleiben, weil bei dem Variiren auch die Permutationen zulässig sind.

7) Beispiel. Wie viele Variationen sind bei einem Quadrillespiel in Austheilung der 32 Kartenblätter möglich? (Hier wird nicht bloß um die Zahl der möglichen verschiedenen Kombinationen, sondern auch um die Ordnung gefragt, welches von den acht Blättern jeder Spielende als das erste, zweite, dritte u. s. w. in die Hand bekomme).

Auflösung. Von vier Spielenden erhält ein jeder 8 Karten, also sollen 32 variirt werden nach (8) Oktonionen. In diesem Falle ist $n = 32$, $m = 8$.

32.31.30.29.28.27.26.25 = 424.097'856.000 Variationen.

8) Aufgabe. Mehrere gegebene Elemente mit Wiederholungen zu variiren; z. B. (a, b, c, d), d. i. Var. rep. (a, b, c, d).

Auflösung. a, b, c, d sind $4 = 4^1$ Unionen.

Verbindet man mit jedem Elemente jedes gegebene, also auch jedes mit sich selbst, so entstehen die Binionen.

aa,	ab,	ac,	ad	sind $16 = 4^2$ Binionen.
ba,	bb,	bc,	bd	
ca,	cb,	cc,	cd	
da,	db,	dc,	dd	

Aus den Binionen entstehen auf ähnliche Weise die Ternionen. Z. B.

aaa,	aab,	aac,	aad	caa,	cab,	cac,	cad
aba,	abb,	abc,	abd	cba,	cbb,	cbc,	cbd
aca,	acb,	acc,	acd	cca,	ccb,	ccc,	ccd
ada,	adb,	adc,	add	cda,	cdb,	cdc,	cdd
baa,	bab,	bac,	bad	daa,	dab,	dac,	dad
bba,	bbb,	bbc,	bbd	dba,	dbb,	dbc,	dbd
bca,	bcb,	bcc,	bcd	dca,	dcb,	dcc,	dcd
bda,	bdb,	bdc,	bdd	dba,	ddb,	ddc,	ddd

sind $64 = 4^3$ Ternionen.

9) Aufgabe. Die Anzahl der Variationen jeder einzelnen Klasse für das Variiren mit Wiederholungen zu finden.

Auflösung. Man erhebe n, die Anzahl der gegebenen Elemente, zu einer Potenz, deren Exponent die Ordnungszahl der Variationsklasse ist.

Beweis. Verbindet man von n Elementen jedes mit sich selbst, so gibt es $n \times n = n^2$ Binionen.

Verbindet man jede dieser n^2 Binionen wieder mit einem jeden der n Elemente, so erhält man $n^2 \times n = n^3$ Ternionen.

Jede dieser Ternionen mit einem jeden der n Elemente verbunden gibt $n^3 \times n = n^4$ Quaternionen.

Daher gibt n^m die Summe der Variationen für die m^{te} Klasse.

Anmerkung. Man prüfe diese Formel durch praktische Beispiele.

a) Variation eines Elementes.

Ein Element (a) gibt nur eine Variation für jede Klasse; indem 1 zu was immer für einer Potenz erhoben immer = 1 bleibt.

a eine Union.
a a eine Binion.
a a a eine Ternion.

b) Variation zweier Elemente.

Zwei Elemente (a, b) geben vier Binionen: $2^2 = 4$.

aa, ab,
ba, bb.

— — — — — acht Ternionen: $2^3 = 8$.

aaa, aab, aba, baa,
bbb, bba, bab, abb.

c) Variation dreier Elemente: (a, b, c).

Die Binionen sind $3^2 = 9$; aa, ab, ac,
ba, bb, bc,
ca, cb, cc.

Die Ternionen sind $3^3 = 27$, nämlich:

aaa, baa, caa	aba, bba, cba	aca, bca, cca
aab, bab, cab	abb, bbb, cbb	acb, bcb, ccb
aac, bac, cac	abc, bbc, cbc	acc, bcc, ccc

10) Beispiele:

a) Wie viele verschiedene Würfe (Variationen der geworfenen Augen) sind mit drei Würfeln möglich?

Antwort. Der Wurf mit drei Würfeln gibt eine Ternion; also $\left.\begin{matrix} n = 6 \\ m = 3 \end{matrix}\right\} 6^3 = 216$ Variationen der Würfe.

* Hier muß aber ein Würfel als der erste, der andere als zweiter u. s. w. gedacht werden, so daß folglich die Würfe

z. B. $\left.\begin{matrix} 1,5,5 \\ 5,1,5 \\ 5,5,5 \end{matrix}\right\}$ als drei verschiedene gelten.

b) Wie viele Zahlen zu 1 und 2 Zifferstellen (also Variationen der ersten und zweiten Klasse, d. i. Unionen und Binionen) kann man mit 9 Ziffern schreiben?

Antwort. Unionen $= 9^1 = 9$,
Binionen $= 9^2 = 81$,
Summe der Variationen $= 90$. Dazu kommen noch die neun Einheiten mit der Nulle 10, 20, 30, 40 u. s. w.

Zusatz 1. Aus gleichem Grunde kann man mit den neun Zahlziffern nur $9^3 = 729$ Zahlenverbindungen von 3 Zifferstellen schreiben. — Die Variationen mit 0 am Ende sind 81.
— — — mit 00 am Ende — 9.
— — — mit 0 in der Mitte 81.
171.

Also $729 + 171 = 900$ Ternionen.
Dazu noch 9 Unionen, 90 Binionen $= 999$ Variationen.

So viele Zahlen kann man mit 1, 2, 3 Ziffern schreiben.

Zusatz 2. Da n^2, n^3, n^4.... die Anzahl der Variationen von n Elementen nach Binionen, Ternionen, Quaternionen... mit Wiederholungen ausdrücken; so kann eine mehrthei-

lige Größe zur zweiten, dritten, vierten ꝛc. Würde erhoben werden, wenn man deren Glieder nach Binionen, Ternionen, Quaternionen ꝛc. mit Wiederholungen variirt, oder mit Wiederholungen kombinirt, und von den einzelnen Komplexionen die Permutationszahlen als Koeffizienten angibt. Z. B.

1) $(a+b+c)^2$ heißt: $a+b+c$ soll zum Quadrate erhoben, oder es sollen die Elemente a, b, c zu Zweien variirt werden. Variirt man sie wirklich, so erhält man:

$aa, bb, cc = a^2, b^2, c^2$
$ab, ba, = 1.2ab$, weil ab als Produkt $= ba$
$ac, ca = 1.2ac$
$bc, cb = 1.2bc$

Also $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

2) $(a+b+c)^3$ = Var. rep. (a, b, c) nach Ternionen:

$aaa, bbb, ccc = a^3, b^3, c^3$; Permutationszahl von jedem $=1$;

$aab = a^2b$
$aac = a^2c$
$abb = ab^2$
$cbb = cb^2$
$acc = ac^2$
$bcc = bc^2$

} kann $\frac{1.2.3}{1.2}$ = 3mal permutirt werden;

abc kann $1.2.3 = 6$mal permutirt werden.

Also $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+3b^2c+3ac^2+3bc^2+6abc$.

Summe der Koeffizienten $3^3 = 27$.

§. 70.

Die bisher aufgezählten Gesetze der Syntaktik geben Veranlassung zu nützlichen Reflexionen über die erstaunliche Mannigfaltigkeit und über die zahllosen Abstufungen der Produkte in den drei Reichen der Natur, über die Wahr- oder Unwahrscheinlichkeit des Gewinns oder Verlustes bei gewissen Spielen, über den Werth einer Erwartung. — Ueber diese letzten Punkte werden hier einige Beispiele nicht am unrechten Orte stehen!

1) Welches ist bei der gewöhnlichen Zahlenlotterie die Wahrscheinlichkeit, einen Auszug, und zwar

a) einen unbestimmten,
b) einen bestimmten zu erhalten?

Auflösung. a) Die Zahlenlotterie enthält 90 Numern; fünf Numern werden gezogen, welche eben so viele Auszüge enthalten können, wenn man nur auf einen unbestimmten Auszug setzt (d. h. nicht bestimmt, der wie vielte Numer in der Quinion der gesetzte seyn müsse). — Daher verhält sich die Anzahl der Errathungsfälle zur Anzahl aller möglichen Fälle, oder die Wahrscheinlichkeit, einen unbestimmten Auszug zu erhalten, zur Gewißheit wie 5 zu 90. — Setzt man die Gewißheit = 1, d. i. betrachtet man diese als das Ganze, und die Wahrscheinlichkeit als aliquoten Theil, so erhält man für diese letzte im befraglichen Falle $\frac{5}{90} = \frac{1}{18}$. Wenn man also einen Numer auf einen unbestimmten Auszug setzt, so ist unter 18 Fällen nur einer wahrscheinlich für die Erhaltung eines unbestimmten Auszuges, d. i. gleiches Glück des Lotterie-Unternehmers und des Spielers vorausgesetzt, gewinnt jener 13mal, bis dieser einmal; folglich sollte der Unternehmer, wenn er sich keinen besondern Vortheil verschaffen wollte, das Achtzehnfache des Einsatzes für einen errathenen unbestimmten Auszug bezahlen.

Auflösung von b. Da ein bestimmter Auszug unter den fünf gezogenen Numern eine bestimmte Stelle haben muß, welche aber fünfmal verändert werden kann, so ist dieses eben so viel, als wenn von 90 Numern jedesmal anstatt 5 nur eine einzige gezogen würde. Daher ist die Wahrscheinlichkeit, einen bestimmten Auszug zu erhalten, nur $\frac{1}{90}$ im Verhältnisse zur Gewißheit.

2) Man bestimme die Wahrscheinlichkeit, mit welcher

a) eine Ambe,
b) eine Terne,
c) eine Quaterne,
d) eine Quinterne zu hoffen ist,

unter der Voraussetzung, daß man bei der Ambe nur 2, bei der Terne 3, bei der Quaterne 4, bei der Quinterne 5 Numern besetze. —

Auflösung von a. Die 90 Numern enthalten 4005 Amben (§. 68. I. 5. b.); in 5 Numern, die gezogen werden, sind

$\frac{5.4}{1.2} = 10$ Amben enthalten; folglich sind unter 4005 Fällen nur 10 für das Errathen der Amben; daher verhält sich die Anzahl der Errathungsfälle zur Anzahl aller möglichen Fälle wie 10 zu 4005, d. h. die Wahrscheinlichkeit ist $\frac{10}{4005} = \frac{1}{400\frac{1}{2}}$. — Für bestimmte Amben, bei welchen auch der Zug bestimmt werden muß, auf welchen jeder der beiden Numern kommen soll, wird die Wahrscheinlichkeit gar nur $\frac{10}{4005 \times 20} = \frac{1}{8010}$; denn unter fünf gezogenen Numern finden zwanzig Versetzungen für eine bestimmte Ambe statt. Es seyen diese fünf Numern a, b, c, x, y, und x, y gelten für die beiden Numern der bestimmten Ambe. — Da es hier nur auf die Stellen von x und y ankommt, übrigens gleichgültig ist, ob die drei andern Numern nach der Folge abc, oder acb, oder bac gezogen werden: so kann man sich die gezogenen fünf Numern als eine Komplexion mit Wiederholungen, also von a, a, a, x, y, vorstellen, welche (nach §. 66. II. 3) $\frac{1.2.3.4.5}{1.2.3} = 20$ Permutationen zuläßt, folglich muß man 20 mal 4005 bestimmte Amben besetzen, um zuverlässig 10 bestimmte Amben zu machen.

b) In 90 Numern sind 117480, in den fünf gezogenen Numern aber $\frac{5.4.3}{1.2.3} = 10$ Ternen enthalten; d. h. wer 117480 Zettel, jeden mit drei Numern gehörig besetzt, kann mit Zuversicht 10 Ternen erwarten. Die Wahrscheinlichkeit, eine Terne zu errathen, ist daher nur $\frac{10}{117480} = \frac{1}{11748}$ von der Gewißheit 1.

c) Da in 90 Numern 2'555.190 Quaternen, in den fünf gezogenen Numern aber $\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4} = 5$ Quaternen enthalten sind; so ist die Wahrscheinlichkeit nur $\frac{1}{511033}$ im Verhältniß zur Gewißheit 1.

d) Endlich für die Quinternen ist diese Wahrscheinlichkeit gar nur $\frac{1}{43'949.268}$; d. h. wer zuverlässig eine Quinterne er-

halten wollte, müßte 43'949.268 Zettel, jeden mit fünf Numern, und diese gehörig permutirt, besetzen.

Anmerkung. In Bayern wird im Errathunsfalle, die Stempelgebühr abgerechnet, im Verhältnisse des Einsatzes

bei	bezahlt das Nfache	statt des Nfachen
unbestimmtem Auszuge .	15	18
bestimmtem Auszuge .	75	90
unbestimmter Ambe . .	270	400½
bestimmter Ambe . . .	5100	8010
einer Terne	5400	11748
einer Quaterne . . .	60000	511038

Eine Quinterne wird nicht mehr bezahlt. Aus dieser Tabelle ergibt sich, wie sehr das Aerar auch bei gleichem Glücke gegen den Spieler im Vortheile ist: unter obiger Voraussetzung gewinnt das Aerar z. B. von allen auf Ternen gemachten Einsätzen das 11748 — 5400 = 6348fache. Setzt z. B. Jemand öfters auf eine bestimmte Ambe (ohne Stempelgebühr) 1 fl.; so ist es wahrscheinlich, daß er bei 8010 Spielen einmal gewinnt. Er müßte dann, um seinen Verlust wieder zu bekommen, 8010 fl. erhalten; statt dessen erhält er im Errathungsfalle 5100 fl. Der Spieler bleibt demnach in der Regel immer im Verluste; das Lottospiel ist daher um so schädlicher, als es dem Unerfahrenen die reizende Möglichkeit zeigt, auch bei geringem Einsatze, ohne Mühe, zu gewinnen, und als es damit auch um so nachtheiliger auf dessen Moralität einwirkt.

3. Wie groß ist bei dem sogenannten la bête-Spiel für jeden der Spielenden, wenn deren sechs sind, die Wahrscheinlichkeit, die drei größten à tous (Trümpfe) zu erhalten?

Auflösung. Dieses Spiel wird mit 32 Kartenblättern gespielt, wovon jeder Spielende 3 Blätter erhält, und wo überdieß eine à tout Farbe aufgeschlagen wird.

32 Kartenblätter geben $\frac{32.31.30}{1.\ 2.\ 3}$ = 4960 Ternionen, oder Trinationen.

Sechs Spieler erhalten 18 Kartenblätter, worunter $\frac{18.17.16}{1.\ 2.\ 3}$ = 816 Ternionen. Da ferner eine vierfache à tout Farbe mög-

lich ist, folglich eine vierfache Variation statt haben kann, so ist die befragliche Wahrscheinlichkeit nur $\frac{816}{4960 \times 4} = \frac{204}{4960} = \frac{1}{25}$ ungefähr.

4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit drei Würfeln einen Pasch zu machen?

Auflösung. Bei drei Würfeln A, B, C sind 15 Würfe möglich, in denen auf der Oberfläche eines jeden der drei Würfel sechs Augen vorkommen, indem diese 6 Augen entweder auf A und B, oder auf A und C, oder auf B und C sich befinden, welches 3 Fälle sind. In Ansehung eines jeden dieser drei Fälle sind aber fünf verschiedene Lagen des einzelnen Würfels möglich, in so fern er nämlich nicht auch zugleich 6 Augen zeigen soll. Dieses gibt $3 \times 5 = 15$ Fälle. Da nun dieser Schluß auch für 2 Einser, 2 Vierer, 2 Dreier u. s. w. gilt, so sind 6mal 15 = 90 Fälle möglich, mit drei Würfeln einen Pasch zu werfen. Drei Würfel aber geben $6^3 = 216$ Variationen mit Wiederholungen (§. 69. 10. a.); daher ist die Wahrscheinlichkeit mit drei Würfeln einen Pasch zu werfen $\frac{90}{216} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$.

5) Ein erwarteter Gewinn wird um so größern Werth haben, je größer er an und für sich, und je größere Wahrscheinlichkeit für ihn vorhanden ist. Darnach läßt sich auch bestimmen, was der erwartete Gewinn, noch vor seinem Eintritte, werth ist. Z. B.

a) Ist auf den besten Würfelwurf 1 fl. gesetzt, so wird, da 6 verschiedene Würfe möglich sind, ein Wurf überhaupt $\frac{1}{6}.60 = 10$ kr. werth seyn.

b) Was ist in einer Lotterie ein Loos werth, wenn es aus 3100 Loosen besteht, das erste 1000 fl., das zweite 800 fl., das dritte und vierte 600 fl., das fünfte, sechste, siebente, achte 400 fl., die nächstfolgenden sechs Loose, jedes 200 fl., die nächstfolgenden zehn, jedes 100 fl.; die nächstfolgenden dreißig, jedes 50 fl.; endlich die nächstfolgenden 50 Loose, jedes 20 fl. gewinnen kann?

Auflösung. Der Werth der gewinnenden Loose ist:

1.	1000	=	1000
1.	800	=	800
2.	600	=	1200
4.	400	=	1600
6.	200	=	1200
10.	100	=	1000
30.	50	=	1500
50.	20	=	1000
104 Treffer			9300 fl.

$x = \frac{9300}{3100} = 3$ fl. Werth eines Looses.

II. Abschnitt.

Potenzenlehre.

§. 71.

In diesem Abschnitte wird die Potenzenlehre monomischer, binomischer und polynomischer Größen unterschieden, und in abgesonderten Hauptstücken abgehandelt. — Die Potenzen werden dabei in doppelter Rücksicht betrachtet:

1°) als Würden (im engern Sinne), wenn ihre Exponenten ganze Zahlen sind,

2°) als Wurzelgrößen, wenn ihre Exponenten gebrochene Zahlen sind.

I. Hauptstück.

Würdenlehre monomischer Größen.

Erster Artikel.

Monomische Größen als Würden.

§. 72.

I. **Würde** (Potentia, Dignitas, Potestas) heißt ein Produkt aus lauter gleichen Faktoren, oder das Produkt einer Größe aus sich selbst; einer von den gleichen Faktoren heißt in Beziehung auf die Potenz **Wurzel**.

Z. B. $2.2 = 4$. | $2.2.2 = 8$. | $2.2.2.2 = 16$.

Allgemein aa, aaa, aaaa.

Die Anzahl der gleichen Faktoren heißt der Grad oder Exponent der Würde. So ist 16 die vierte Würde (eine Würde des vierten Grades) von 2, und umgekehrt von 16 ist die vierte Wurzel = 2.

* Die Würden des zweiten Grades nennt man auch Quadrate, die des dritten Kubusse, oder Kubikzahlen, die des vierten Biquadrate.

II. Der Exponent dient nur der Würde einen kürzern und faßlichern Ausdruck zu geben. Z. B.

$aa = a^2$. $aaa = a^3$. $aaaaaaa = a^7$.

III. Der Exponent 1 wird, so wie der Koeffizient 1, nicht ausdrücklich gesetzt, sondern bei jeder Größe, die keinen andern Exponenten hat, verstanden. Z. B.

$6 = 6^1$; $a = 1.a^1 = a^1$.

IV. Auch die Exponenten können allgemeine Größen seyn, d. i. die Anzahl der gleichen Faktoren kann unbestimmt seyn. Demnach bezeichnet man auch Exponenten mit Buchstaben, und zwar gewöhnlich mit m, n, r, s, ꝛc.; sie können auch zusammengesetzte Größen seyn. So drückt a^{m+1} aus, daß a als Faktor $(m+1)$ mal stehen soll: ist $a = 3$, $m = 4$, so ist $a^{m+1} = 3^{4+1} = 3^5 = 3.3.3.3.3 = 243$; für $m = 5$ ist $a^{m+1} = 3^6 = 3^5.3 = 243.3 = 729$, für $m = 6$ ist $a^{m+1} = 3^7 = 3^6.3 = 2187$.

** Man sieht hieraus, daß man aus einer Potenz einer Größe eine um einen Grad höhere erhält, wenn man sie noch einmal mit der Wurzel multiplizirt, daß man eine Größe überhaupt zu einer Potenz erhebt, wenn man sie entweder so oft als Faktor setzt, oder so oft, weniger einmal, mit sich multiplizirt, als der Exponent Einheiten enthält.

V. Potenzen, so wie die einzelnen Faktoren oder Wurzeln desselben, sind jederzeit nur Zahlen; denn nur Zahlen lassen sich durcheinander multipliziren, und geben ein Produkt aus gleichen Faktoren.

VI. Die Würden von 1 bleiben immer unverändert; die der übrigen natürlichen Zahlen aber wachsen nach einem bestimmten Verhältnisse. — Man kann dabei die Würde mit dem Exponenten bloß anzeigen, z. B. 2^3, 4^2, 5^4; oder die Multiplikation wirklich verrichten.

VII. Da $10^1 = 10$, $10^2 = 10.10$, $10^3 = 10.10.10 = 1000$, $10^4 = 10.10.10.10 = 10000$ ꝛc., so ergibt sich, daß 10 zu irgend einer Potenz erhoben, gleich ist 1 mit so viel angehängten Nullen als der Exponent Einheiten enthält. 10^{2n-1} ist $= 1$ mit $2n-1$ angehängten Nullen.

* Jeder Dezimalbruch kann, wenn a den Zähler, m die Anzahl der Dezimalen, δ zehn bezeichnet, angeschrieben werden: $\frac{a}{\delta^m}$.

§. 73.

Aus dem Begriffe von Potenz, Multiplikation und Division ergeben sich folgende Sätze:

I. Potenzen von einerlei Größe werden multiplizirt, wenn man ihre Exponenten addirt; denn

$$a^2 \times a^3 = aa \times aaa = aaaaa = a^{2+3} = a^5$$

$a^m \times a^n$ heißt: das m mal als Faktor gesetzte a soll mit dem n mal als Faktor gesetzten a multiplizirt werden, mithin wird nun a..(m+n) mal als Faktor gesetzt; oder $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

II. Potenzen von einerlei Größe werden dividirt, wenn man den Exponenten des Divisors von jenem des Dividends subtrahirt, oder, was eines ist, mit veränderten Zeichen zu diesem addirt.

Z. B. $\frac{aaa}{a} = aa = a^2$ | $\frac{aaaaaa}{aa} = aaaa = a^4$,

oder $a^3 : a = a^{3-1} = a^2$ | $a^6 : a^2 = a^{6-2} = a^4$;

allgemein: $a^m : a^n = a^{m-n}$. Es fallen von den m gleichen Faktoren des Dividends n gleiche Faktoren hinweg; bleiben also noch m—n gleiche Faktoren übrig, jeder $= a$.

III. Eine Zahl mit dem Exponent $0 = 1$.

Denn $x^\circ = x^{m-m}$.

$x^{m-m} = x^m : x^m = 1$.

also $x^\circ = 1$.

* Eine Größe zur Nullwürde erheben heißt folglich, sie durch sich selbst dividiren.

IV. Eine Größe mit negativem Exponenten ist gleich einer Fraktion, deren Zähler 1, und deren Nenner die Größe mit positivem Exponenten ist.

Denn: $x^{-n} = x^{n-2n} = x^n : x^{2n}$.

$$x^n : x^{2n} = \frac{x^n}{x^{2n}} = \frac{x^n}{x^n x^n} = \frac{1}{x^n}.$$

also $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.

§. 74.

Mittelst des letzten Satzes kann man jede Fraktion in eine Würde mit negativem Exponenten verwandeln, und den Nenner ganz entbehren. Z. B.

$$\frac{1}{a} = a^{-1}. \quad \frac{1}{a^2} = a^{-2}. \quad \frac{1}{a^3} = a^{-3}. \quad \frac{1}{a^n} = a^{-n}.$$

Es kann eine solche Größe noch andere Faktoren mit positiven oder negativen Exponenten bei sich führen. Z. B.

$$bc^{-1} = b \times \frac{1}{c} = \frac{b}{c}.$$

$$bc^{-1}d^{-2} = \frac{b}{cd^2} \text{ u. s. w.}$$

Im Gegentheile ist auch $\frac{b}{a^{-1}} = a^{+1}b = ab. \quad \frac{c}{x^{-n}} = cx^n.$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m . a^{-n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}.$$

Anmerkung. Dezimalen können demnach auch mit negativen Exponenten bezeichnet werden.

$$\frac{a}{10}, \frac{a}{100}, \frac{a}{1000}, \frac{a}{10{,}000}, \frac{a}{100{,}000} \text{ u. s. w.}$$

$$= \frac{a}{10^1}, \frac{a}{10^2}, \frac{a}{10^3}, \frac{a}{10^4}, \frac{a}{10^5}$$

$$= a.10^{-1}, a.10^{-2}, a.10^{-3}, a.10^{-4}, a.10^{-5} \ldots\ldots a\delta^{-n}.$$

§. 75.

Da die (§. 73. I. II.) gegebenen Regeln allgemein sind, so gelten sie auch für die Multiplikation und Division der Größen mit negativen Exponenten.

Also z. B. $a^{-2} \times a^{-3} = a^{-5}$.

Denn $a^{-2} \times a^{-3} = \frac{1}{a^2} \times \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a^5} = a^{-5}$.

Allgemein $a^{-m} \times a^{-n} = a^{-(m+n)}$.

Ferner: $a^2 : a^{-5} = a^{2+5} = a^7$.

Denn $a^2 : a^{-5} = a^2 : \frac{1}{a^5} = \frac{a^2 \times a^5}{1} = a^7$.

Allgemein $a^m : a^{-n} = a^{m+n}$.

§. 76.

Beispiele der Multiplikation und Division einfacher Potenzen.

1) $\frac{a}{\delta^m} \times \frac{b}{\delta^n} = \frac{ab}{\delta^{m+n}} = ab.\delta^{-(m+n)}$.

Allgemeiner Beweis für die Multiplikation der Dezimalen.

2) $\frac{a}{\delta^m} : \frac{b}{\delta^n} = \frac{a.\delta^n}{b.\delta^m} = \frac{a}{b\delta^{m-n}}$.

Ist $m = n$, so ist $\delta^{m-n} = 1$ (§. 73. III.), folglich wird, wenn Dividend und Divisor gleichviel Dezimalen haben, der Quotient erhalten, wenn man sie als Ganze dividirt; ist $m > n$, so sind von dem auf die nämliche Art enthaltenen Quotienten m—n Dezimalen abzuschneiden; ist $n > m$, so setze man den Quotienten $= \frac{a.\delta^{n-m}}{b}$, folglich sind dem Dividend n—m Nullen anzuhängen, und dann Dividend und Divisor als Ganze zu betrachten.

3) $\frac{a^m}{b} \times ab^3 = a^m.b^{-1} \times ab^3 = a^{m+1}b^2$

4) $2.3^m a^2 b^{m-1} \times 4.3^n a^{-2} b^{n+1} = 8.3^{m+n} b^{m+n}$

5) $2^m a^2 b^{m+1} : 2a^{-2} b^{n-1} = 2^{m-1} a^4 b^{m-n+2}$.

§. 77.

I. Ein Produkt erhebt man zu einer Würde, wenn man die einzelnen Faktoren dazu erhebt.

Beweis. $(ab)^m = ab.ab.ab....$ m mal als Faktor gesetzt $=$
$aaa....m.bbb.....m = a^m b^m$,

Z. B. $(4 \times 5)^2 = 4^2.5^2 = 16.25 = 400$, so auch $(20)^2 = 400$.

II. Einen Bruch erhebt man zu einer Würde, wenn man Zähler und Nenner einzeln dazu erhebt.

Beweis. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \ldots\ldots$ m mal als Faktor gesetzt, $= \frac{aaa....m}{bbb...m} = \frac{a^m}{b^m}$.

z. B. $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

* Bei der Potenzirung einer Summe oder Differenz genügt es aber keineswegs, daß man jedes Glied einzeln zur Potenz erhebt. So ist z. B. $(a+b)^2$ nicht $= a^2+b^2$, sondern $= a^2+2ab+b2$. Das Mehrere hierüber im folgenden Hauptstücke.

§. 78.

Eine Würde erhebt man neuerdings zu einer Würde, wenn man die Wurzel der ersten zu einer Würde erhebt, deren Exponent das Produkt der gegebenen Exponenten ist.

Beweis. $(a^2)^3 = a^2 . a^2 . a^2 = a^{2+2+2} = a^{2.3} = a^6$

$(a^n)^m = a^n . a^n . a^n \ldots\ldots$ m mal als Faktor gesetzt

$= a^{n+n+n \ldots\ldots} = a^{nm}$.

Umgekehrt ist $a^{nm} = (a^n)^m$; $a^6 = (a^2)^3$.

Zusatz 1. Hieraus leitet sich eine Methode ab, die höhern Potenzen einer Zahl, z. B. von 3, leichter zu finden. Um z. B. die 18te Würde der Zahl 3 zu finden, multiplizire ich den Kubus von 3 mit sich selbst, d. i. erhebe ihn zum Quadrate, so gibt dieses die 6te Würde von 3.

$$(3^3)^2 = 3^6 = 27 \times 27 = 729.$$

Erhebt man diese auf ein neues zum Kubus, so ergibt sich die 18te Würde von 3. —

Denn $(3^6)^3 = 3^{18} = (729)^3 = 387420489$.

Oder um die 5te Würde der Zahl 32 zu erhalten, multiplizire ich ihr Quadrat mit ihrem Kubus:

$$(32^2) \times (32)^3 = 32^{2+3} = 32^5$$
$$= 1024 \times 32768 = 1'048.576.$$

Zusatz 2. $(-a)^2 = -a . -a = +a^2$, also

$(-a)^{2n} = ((-a)^2)^n = (+a^2)^n = +a^{2n}$

$(-a)^{2n+1} = (-a)^{2n} . -a = +a^{2n} . -a = -a^{2n+1}$.

Daraus ergibt sich der wichtige Satz: Erhebt man eine negative Größe zur 2nten Würde, d. i. zu einer Würde mit geraden Exponenten (§. 45.), so wird diese positiv; die Würde einer negativen Größe bleibt negativ, wenn der Exponent eine ungerade Zahl ist. Eine positive Zahl bleibt, zu jeder Würde

erhoben,

erhoben, positiv. So lange bei einer negativen Größe nicht bestimmt ist, ob der Exponent gerade oder ungerade ist, ist das Zeichen der Potenz auch unbestimmt, was man mit $\pm$ bezeichnet. So ist $(-a)^n = \pm a^n$; $(-a^{-1} b^m c^2)^{n+1} = \pm a^{-n-1} b^{mn+n} c^{2n+2}$ und $4a^4(b-c)^6 = (\pm 2a^2(b-c)^3)^2$.

Zusatz 3. Jede Zahl mit angehängten Nullen kann als Produkt einer nur mit bedeutsamen Ziffern geschriebenen Zahl in eine Potenz von 10 (z. B. $1200 = 12.100 = 12.10^2$, $4000 = 4.10^3$ also in der Form $a.10^m$ dargestellt werden. (§. 72. VII.). Nun ist $(a.10^m)^n = a^n.10^{mn}$; man hängt also bei der Potenzirung einer solchen Zahl der Potenz der bedeutsamen Ziffern, statt jeder in der Wurzel stehenden Nulle, so viele Nullen an, als der Exponent Einheiten enthält. Z. B. $(1200)^3 = 1728.10^6 = 1728000000$.

Zusatz. 4. $\left(\frac{a}{\delta^m}\right)^n = \frac{a^n}{\delta^{mn}}$: ein Dezimalbruch von m Dezimalen erhält in der n^{ten} Würde mn Dezimalen. Z. B. $(0{,}4)^4 = 0{,}0256$.

§. 79.

Würden heißen:

1) Gleichnamig, wenn sie gleichen Exponenten, aber verschiedene Größen haben, z. B. a^3, b^3, c^3; ungleichnamig, wenn ihre Exponenten verschieden sind, z. B. a^2, a^3, a^4.

2) Gleichartig, wenn sie einerlei Größe und einerlei Exponenten haben, z. B. $a^2 + 5a^2$ oder $b^{-3} + 7b^{-3}$; ungleichartig, wenn die Größen oder die Exponenten verschieden sind.

* Um dieses zu versinnlichen, habe man die Größen a, b, c, und a stelle einen Zoll, b einen Fuß, c eine Ruthe vor; erhebt man sie nun zu gleichnamigen Würden, so erhält man:

$a = 1$ Zoll.	$a^2 = \square$ Zoll.	$a^3 =$ Kubikzoll.
$b = 1$ Fuß.	$b^2 = \square$ Fuß.	$b^3 =$ Kubikfuß.
$c = 1$ Ruthe.	$c^2 = \square$ Ruthe.	$c^3 =$ Kubikruthe.

Keine von diesen neun Größen ist mit der andern gleichartig, außer jede mit sich selbst; denn entweder ist darin die Größe, oder der Exponent (die Anzahl der Dimensionen) verschieden. Wohl aber sind je drei und drei untereinander stehende Ausdrücke gleichnamig.

Anmerkung. Daß sich gleichartige Würden im strengen Sinne addiren und subtrahiren lassen, und wie die vier Stammrechnungsarten mit Würdengrößen zu behandeln seyen, wurde schon im ersten Abschnitte gezeigt. Da aber dort nur Würden mit positiven und bestimmten Exponenten vorkamen, so wollen wir einige Rechnungsbeispiele von Würdengrößen mit negativen und allgemeinen Exponenten hersetzen.

§. 30.

Beispiele der Addition und Subtraktion.

1°) $3a^{-1} + \frac{1}{2}b^{-2}$ Probe. $8a^{-1} - 6\frac{1}{2}b^{-2}$

$5a^{-1} - 7b^{-2}$ $3a^{-1} + \frac{1}{2}b^{-2}$

$8a^{-1} - 6\frac{1}{2}b^{-2}$. $5a^{-1} - 7b^{-2}$.

2°) $2a^3 + 3a^2 - 4a + 5a^\circ - 6a^{-1} + 7a^{-2}$

$-(a^3 - 2a^2 + 3a - 4a^\circ + 5a^{-1} - 6a^{-2})$

$- \quad + \quad - \quad + \quad - \quad +$

$a^3 + 5a^2 - 7a + 9a^\circ - 11a^{-1} + 13a^{-2}$.

Probe. $a^3 - 2a^2 + 3a - 4a^\circ + 5a^{-1} - 6a^{-2}$

$2a^3 + 3a^2 - 4a + 5a^\circ - 6a^{-1} + 7a^{-2}$.

3°) $(n+2)a^{n-1} - (2n+3)a^{n-2} - (n-4)a^{n-3}$

$-((n-1)a^{n-1} + (n-3)a^{n-2} - (2n+4)a^{n-3})$

$- \quad - \quad +$

$3a^{n-1} - 3na^{n-2} + (n+8)a^{n-3}$.

§. 31.

Beispiele der Multiplikation und Division.

1°) $a^{-1} + b^{-1}$

$a^{-1} - b^{-1}$

$a^{-2} + a^{-1}b^{-1}$

$- a^{-1}b^{-1} - b^{-2}$

$a^{-2} \quad - b^{-2}$.

Setzt man $a = 2$, $b = 3$, so erhält man

$2^{-1} + 3^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

$2^{-1} - 3^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$2^{-2} + 2^{-1}.3^{-1} \quad \frac{5}{36}$

$- 2^{-1}.3^{-1} - 3^{-2}$

$2^{-2} - 3^{-2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} = \frac{5}{36}$.

2°) $(4a^2x^{m+n} - \frac{2}{3}a^{-3}x^{m-1} + 3a^{-2}x^{2m+1} - \frac{4}{5}a^3x^{-m} - 5a^mx) \times 2a^{-2}x^{m-1}$
$= 8x^{2m+n-1} - \frac{4}{3}a^{-5}x^{2m-2} + 6a^{-4}x^{5m} - \frac{8}{5}ax^{-1} - 10a^{m-2}x^m$

3°) $(\frac{4}{5}a^2x^{m-1} - 4ax^m + 3a^{-1}x^{m+2} - a^{-2}x^{2-m} + \frac{2}{3}a^{-4}x) : \frac{2}{3}a^{-2}x^{m-1}$
$= \frac{6}{5}a^4 - 6a^3x + \frac{9}{2}ax^3 - \frac{3}{2}x^{5-2m} + a^{-2}x^{2-m}$.

4°)

$$\frac{81x^{-4}}{10.000} - \frac{16}{625}y^{-4} \left\{ \begin{matrix} \frac{27}{1000}x^{-3} \\ \frac{5}{10}x^{-1} \end{matrix} \right\} + \frac{9x^{-2}y^{-1}}{250} + \frac{6x^{-1}y^{-2}}{125} \left\{ \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right\} \frac{2}{5}y^{-3} + \frac{8}{125}y^{-5}.$$

$$\frac{81\,x^{-4}}{-10.000} + \frac{54}{5000}x^{-3}y$$

$$\frac{-16}{625}y^{-4} + \frac{54}{5000}x^{-3}y^{-1} - \frac{9}{625}x^{-2}y^{-2}$$

$$\frac{+9}{625}x^{-2}y^{-2} - \frac{16}{625}y^{-4} + \frac{54}{5000}x^{-3}y^{-1} - \frac{12x^{-1}y^{-3}}{625}$$

$$\frac{+9}{-625}x^{-2}y^{-2} + \frac{12x^{-1}y^{-3}}{625} - \frac{16y^{-4}}{625}$$

$$\frac{+12x^{-1}y^{-3}}{-625} + \frac{16y^{-4}}{625}$$

0.

§. 82.

Beispiele der Reduktion.

1) $(a+b)^m = \left(a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right)^m = a^m\left(1+\frac{b}{a}\right)^m$

2) $\frac{5a^{-2}b^{2n}-5a^{-2}c^{2n}}{4b^{n-1}-4b^{-1}c^{n}}=\frac{5a^{-2}(b^{2n}-c^{2n})}{4b^{-1}(b^{n}-c^{n})}=\frac{5a^{-2}(b^{n}+c^{n})(b^{n}-c^{n})}{4b^{-1}\ (b^{n}-c^{n})}$

$=\frac{5b(b^{n}+c^{n})}{4a^{2}}$

3) $\frac{\frac{a}{b}-\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b^{n}}}{1-\frac{a}{b}}=\frac{\frac{a}{b}-\frac{a}{b^{n+1}}}{1-\frac{a}{b}}=\frac{ab^{n}-a^{n+1}}{b^{n+1}}:\frac{b-a}{b}$

$=\frac{a(b^{n}-a^{n})}{b^{n}.b}\times\frac{b}{b-a}=\frac{a(b^{n}-a^{n})}{b^{n}(b-a)}$

4) $\frac{a-x^{4}}{ax^{n}}+\frac{a+x^{3}}{ax^{n-1}}-\frac{a^{4}x^{-3}-1}{a^{4}x^{n-3}}=\frac{a^{4}-a^{3}x^{4}+a^{4}x+a^{3}x^{4}-a^{4}+x^{3}}{a^{4}x^{n}}$

$=\frac{a^{4}x+x^{3}}{a^{4}x^{n}}=\frac{a^{4}+x^{2}}{a^{4}x^{n-1}}.$

§. 83.

Die negativen Exponenten haben ihren vorzüglichen Nutzen bei den unendlichen Reihen, die sich ergeben, wenn eine einfache Größe, z. B. a, durch eine komplexe, z. B. a+b, dividirt werden soll, obwohl der Divisor kein Faktor des Dividends ist.

In einem solchen Falle setzt man die Division so lange fort, als man will; wobei dann immer der wahre Quotus, wiewohl immer in verschiedenen Formen, herauskommen muß.

Erklärungen:

1. Eine Menge von Größen, die nach einem bestimmten Gesetze fortlaufen, heißt eine Reihe (Series).

2. Die einzelnen Größen sind die Glieder der Reihe (Termini). Jenes Glied, worin das allgemeine Gesetz erscheint, nach welchem ein Glied aus dem andern entspringt, heißt das allgemeine Glied (terminus generalis).

3. Die Reihe heißt unendlich, wenn sich nie alle Glieder derselben darstellen lassen; widrigenfalls heißt sie bestimmt oder endlich.

4. Um bei solchen Reihen die Fraktionen entbehren zu können, bedient man sich mit Vortheil der negativen Exponenten.

Beispiele. I. $\frac{x}{x-1}$.

Operation: $x \mid 1+x^{-1}+x^{-2}+x^{-3}+x^{-4}\ldots \frac{x^{-n}}{x-1}$

$x-1$

$-\ +$

$+x^0$

x^0-x^{-1}

$-\ +$

$x^{-1}-x^{-2}$

$-\ +$

$x^{-2}-x^{-3}$

$-\ +$

$x^{-3}-x^{-4}$

$-\ +$ u. s. w.

II. $\frac{x}{x+1} = x^0-x^{-1}+x^{-2}-x^{-3}+x^{-4}\ldots+\frac{x^{-n}}{x+1}$.

1. Anmerkung. Kehrt man in dem letzten Beispiele den Divisor um, d. i. setzt: $\frac{x}{1+x}$, so erhält man

$$\frac{x}{1+x} = x-x^2+x^3-x^4+x^5\ldots+x^{2n-1}-x^{2n}.$$

Es sey $x = 1$, so wird

$\frac{x}{1+x} = \frac{1}{2} = 1-1+1-1+1-1\ldots$. welche Reihe entweder 1, oder 0 beträgt, je nachdem sie mit einem positiven oder negativen Gliede geschlossen wird. Ohngeachtet dieser scheinbaren Unrichtigkeit wird die Reihe doch $= \frac{1}{2}$, wenn man noch den Rest $\pm\frac{x^n}{1+x}$ dazu zählt; denn schließe ich mit einem positiven Gliede (wenn der Exponent von x gerade ist), so wird $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. Schließe ich mit einem negativen, so wird $0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

2. Anmerkung. Die Größe $\frac{1}{1+x}$ gibt die unendliche Reihe:

$$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5\ldots\ldots x^n.$$

Setzt man nun wieder: $x = 1$; so wird

$\frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = 1+1+1+1+1+1\ldots\ldots$ ohne Ende, woraus die Mathematiker den Satz ableiten, daß $\frac{1}{0} = \infty$, d. i. der Ausdruck des Unendlichen sey.

§. 84.

Als allgemeine Formeln solcher Divisionen, welche sich in unendliche Reihen auflösen lassen, gelten:

I. $\frac{x}{a+b} = \frac{x}{a} - \frac{bx}{a^2} + \frac{b^2x}{a^3} - \frac{b^3x}{a^4} + \frac{b^4x}{a^5} \ldots\ldots \pm \frac{b^{n-1}x}{a^n}$

$= a^{-1}x - a^{-2}bx + a^{-3}b^2x - a^{-4}b^3x + a^{-5}b^4x \ldots . \pm a^{-n}b^{n-1}x$

Das allgemeine Glied ist: $\pm \frac{b^{n-1}x}{a^n}$.

* Es sey $a = 2$, $b = 1$, $x = 2$, so entsteht

$\frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} = \frac{21}{32}$, also um $\frac{1}{96}$ zu wenig. Nehme ich noch ein Glied $+a^{-6}b^5x$, so wird um $\frac{1}{192}$ zu viel.— Will man aber noch weiter also fortfahren, so erhält man den Quotus immer genauer.

II. $\frac{x}{a-b} = a^{-1}x + a^{-2}bx + a^{-3}b^2x + a^{-4}b^3x \ldots . a^{-n}b^{n-1}x.$

III. Die Fraktion $\frac{1}{1-x-x^2}$ gibt die unendliche Reihe:

$1 + x - x^3 - x^4 + x^6 + x^7 - x^9 - x^{10}$, worin jedes folgende Gliederpaar ein Produkt von dem vorhergehenden in $-x^3$ ist.

Z. B. $(1 + x) \times -x^3 = -x^3 - x^4.$
$(-x^3 - x^4) \times -x^3 = +x^6 + x^7.$
$(x^6 + x^7) \times -x^3 = -x^9 - x^{10}$ u. s. w.

* Es sey $x = \frac{1}{2}$, so erhält man

$\frac{1}{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} - \frac{1}{512} - \frac{1}{1024} \ldots .$

$= \frac{1024 + 512 - 128 - 64 + 16 + 8 - 2 - 1}{1024} = \frac{1365}{1024} = 1\frac{341}{1024}.$

Nun ist diese Fraktion nur um $\frac{1}{3072}$ kleiner, als $\frac{1}{3}$;
nämlich $\frac{1}{3} = \frac{1024}{3072}$,
und $\frac{341}{1024} = \frac{1023}{3072}$.

IV. Was beträgt die unendliche Reihe:

$\frac{x}{1-x} = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \ldots\ldots$, wenn $x = \frac{1}{2}$ ist? Zur Uebung!

Zweiter Artikel.

Monomische Größen als Wurzelgrößen.

A. Einfache Wurzelgrößen, im Allgemeinen betrachtet.

§. 85.

Wurzel heißt in Beziehung auf Potenz einer ihrer gleichen Faktoren. So ist von $2^3 = 8$, 2 die dritte oder Kubikwurzel von 8. Aus einer Größe (x^m) eine (z. B. die n^{te}) Wurzel ausziehen heißt, einen ihrer (n) gleichen Faktoren, oder eine Größe finden, welche zur nämlichen (n^{ten}) Würde erhoben, die gegebene Potenz (x^m) wieder gibt. Man drückt dieß durch das der Größe x^m vorgesetzte Zeichen $\surd$ aus, indem man in dessen Oeffnung die Anzahl der gleichen Faktoren, in welche die gegebene Potenz zerfällt werden soll, schreibt. Solche Größen nun, wie $\sqrt[n]{x^m}$, vor welche ein Wurzelzeichen gesetzt ist, heißt man Wurzelgrößen. — In dieser allgemeinen Form aller Wurzelgrößen stellt also

1) n den Exponenten oder Grad der Wurzel,
2) m den Exponenten oder Grad der Größe,
3) x die Größe selbst vor.

Um die Sache durch einzelne Fälle deutlicher einzusehen, betrachte man folgende Größen:

$\sqrt[2]{x^m}$ oder $\surd x^m$ heißt die zweite oder Quadratwurzel aus x^m;
$\sqrt[3]{x^m}$ heißt die dritte oder Kubikwurzel aus x^m;
$\sqrt[4]{x^m}$ — die vierte Wurzel aus x^m;
$\sqrt[5]{x^m}$ — die fünfte Wurzel aus x^m;
$\sqrt[n]{x^m}$ — die n^{te} Wurzel aus x^m.

Im Gegentheile ist wieder

die zweite Würde von $\surd x^m$ d. i. $(\surd x^m)^2$
— dritte — — $\sqrt[3]{x^m}$ — $(\sqrt[3]{x^m})^3$
— vierte — — $\sqrt[4]{x^m}$ — $(\sqrt[4]{x^m})^4$ $= x^m$.
— fünfte — — $\sqrt[5]{x^m}$ — $(\sqrt[5]{x^m})^5$
die n^{te} Würde von $\sqrt[n]{x^m}$ d. i. $(\sqrt[n]{x^m})^n$

Man sieht hieraus offenbar, daß

I. die Quadratwurzel zweimal
II. die Kubikwurzel dreimal
III. die vierte Wurzel viermal
IV. die n^{te} Wurzel n mal

} als Faktor mit sich selbst multiplizirt werden müsse, um die Größe x^m wieder hervorzubringen.

Anmerkung 1. Läßt sich aus einer Größe die Wurzel vollständig ziehen, oder kann die Wurzel durch eine ganze oder gebrochne Größe vollständig dargestellt werden; so heißt sie eine rationale Größe; sie heißt irrational, wenn die Wurzel nicht vollständig, bei Zahlen nur durch einen in das Unendliche fortlaufenden Dezimalbruch, dargestellt werden kann. Da die Wurzelgrößen meistens Irrationalgrößen sind, so nennt man die Rechnung mit Wurzelgrößen auch: Rechnung mit Irrationalgrößen.

Anmerkung 2. Das Zeichen $\surd$ ist entstanden aus r (radix), welches man früher den Größen vorsetzte.

§. 86.

1) Wurzelgrößen, welche gleiche Größen und Exponenten haben, heißen gleichartig, und lassen sich folglich addiren und subtrahiren, z. B. $2\surd 3 + 5\surd 3 = 7\surd 3$.

Denn wenn ich mir die Wurzel aus 3 als eine bestimmte Größe, z. B. β denke: so erhalte ich $2\beta + 5\beta = 7\beta$.

Eben so $1\surd a$ oder $\surd a + 4\surd a = 5\surd a$.

Allgemein $a\sqrt[n]{x^m} \pm b\sqrt[n]{x^m} = (a \pm b)\sqrt[n]{x^m}$.

2) Wurzeln des nämlichen Grades, aber aus verschiedenen Größen, sind ungleichartig; z. B. $\surd 2$, $\surd 3$, $\surd 5$, u. s. w. Allgemein $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{a^m}$, $\sqrt[n]{a^{2m}}$, $\sqrt[n]{a^{3m}}$ oder $\surd a$, $\surd b$, $\surd c$, $\surd d$, u. s. w.

3) Wurzeln von gleichem Grade heißt man gleichnamig, z. B. $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[n]{c}$ . . . von verschiedenem Grade aber ungleichnamig, z. B. $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[m]{b}$, $\sqrt[r]{c}$, $\sqrt[x]{y}$.

§. 87.

Wenn die Größe hinter dem Wurzelzeichen eine Würde des nämlichen Grades ist, den der Exponent der Wurzel anzeigt,

so kann man die verlangte Wurzel aus der Größe wirklich ausziehen, und mit dem gehörigen Zeichen vor das Wurzelzeichen schreiben. Z. B.

$\sqrt{16} = \pm 4.$ $\sqrt{a^2} = \pm a.$

$\sqrt[3]{-27} = -3.$ $\sqrt[3]{-b^3} = -b.$ Vergl. §. 78. Zus. 2.

Hat nun die Wurzelgröße einen Koeffizienten, so muß dieser mit der sich ergebenden Wurzel multiplizirt werden. Z. B.

$2\sqrt{9} = \pm 2.3. = \pm 6.$

$5\sqrt[3]{64} = 5.4. = 20.$

§. 88.

Aus einem Produkte zieht man die Wurzel aus, wenn man sie aus jedem Faktor einzeln auszieht; aus einem Bruche, wenn aus Zähler und Nenner einzeln.

Beweis.

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b}$; denn $(\sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \times (\sqrt[n]{b})^n = ab$ Vergl. §. 77. I. u. §. 85.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}; \text{ denn } \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b} \text{ (§. 77. II. u. §. 85.)}$$

Enthält daher ein Produkt einen rationalen Faktor, oder ein Bruch einen rationalen Zähler oder Nenner; so kann aus dem rationalen Theile die Wurzel wirklich ausgezogen, und von den irrationalen das Wurzelzeichen gesetzt werden.

Als Beispiele mögen folgende Formeln dienen:

I. $3\sqrt{8} = 3\sqrt{4.2} = 6\sqrt{2}.$

II. $2\sqrt{45} = 2\sqrt{9.5} = 6\sqrt{5}.$

III. $4\sqrt[3]{81} = 4\sqrt[3]{27.3} = 12\sqrt[3]{3}.$

IV. $2\sqrt[3]{-24} = 2\sqrt[3]{-8 \times 3} = -4\sqrt[3]{3}.$

oder $= 3\sqrt[3]{8 \times -3} = 4\sqrt[3]{-3}.$

V. $2\sqrt{-347} = 2\sqrt{-7 \times 121} = 22\sqrt{-7}.$

VI. $\sqrt[3]{a^4 b^3} = b\sqrt[3]{a^4} = ab\sqrt[3]{a}.$

VII. $\sqrt{\frac{3}{4a^2}} = \frac{1}{2a}\sqrt{3}$

VIII. $\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{8}{5}} = \sqrt[3]{\frac{1}{5}}$

IX. $3\sqrt{\frac{50}{27}} = 3\sqrt{\frac{25.2}{9.3}} = 5\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Anmerkung. Aus Summen oder Differenzen kann aber eine Wurzel nicht in der Art ausgezogen werden, daß man sie aus jedem Gliede einzeln ausziehe. Z. B. $\sqrt{a^2+b^2}$ ist keineswegs $= a+b$. Vgl. §. 77. II.*

§. 89.

Im Gegentheile läßt sich jeder Koeffizient, oder ein einzelner Faktor desselben, der vor dem Wurzelzeichen steht, als ein Faktor hinter dieses bringen, wenn man ihn zur Würde des nämlichen Grades erhebt, welchen der Wurzelexponent ausspricht.

Z. B. $2\sqrt{3} = \sqrt{4.3} = \sqrt{12}$.

$3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{27.2} = \sqrt[3]{54}$.

$10\sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{10.000 \times 5} = \sqrt[4]{50.000}$.

allgemein: $a^n\sqrt[m]{b^x} = \sqrt[m]{a^{mn}.b^x}$.

Eben so $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{4}{9}.\frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{1}{6}}$.

§. 90.

Wenn in der allgemeinen Formel der Irrationalzahlen: $\sqrt[n]{x^m}$... die Größe x^m positiv ist, so läßt sich die Wurzel in jedem Falle entweder ganz, oder doch durch Annäherung finden.

Ist aber x^m negativ, so werden alle Wurzeln mit geraden Exponenten (d. i. wenn $n = 2, 4, 6, 8, 10$ u. s. f.) unmögliche (imaginäre) Zahlen (vergl. §. 78. Zus. 2), wofür die allgemeine Form: $\sqrt[2n]{-a}$; ist aber $n = 3, 5, 7, 9$, d. i. eine ungerade Zahl, und x ebenfalls negativ, so wird auch die Wurzel negativ. — Ist endlich x^m keine Würde von dem Grade, welchen der Wurzelexponent n anzeigt, so ist $\sqrt[n]{x^m}$ eine Irrationalgröße.

Anmerkung. Wenn $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n]{y^{mn}}$, d. h. $x = y^n$ ist, so ist $\sqrt[n]{x^m}$ rational. Z. B. in $\sqrt[3]{x^2}$ sey $x = y^3$; so wird die Wurzel rational, und $= \sqrt[3]{y^6} = y^2$.

Also $\sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{2^3 \times 2^3} = 2.2 = 4$.

§. 91.

Da man bei Potenzirung einer Größe, z. B. a^m zum Quadrate, Kubus, Biquadrate ꝛc., zur n^{ten} Würde, den Exponenten der Größe durch 2, 3, 4 ꝛc.... n multiplizirt: so hat man im Gegentheile, um aus der Größe A^m die Wurzel vom 2ten, 3ten, 4ten..... n^{ten} Grade zu ziehen, nichts weiter zu thun, als den Exponenten m durch 2, 3, 4... n zu dividiren. Z. B.

$\sqrt{a^6} = a^3$; denn $(a^3)^2 = a^6$ (§. 85).

Also läßt sich jede Wurzelgröße auf den Ausdruck einer Würde mit gebrochenem Exponenten bringen, wenn man den Würdenexponenten durch den der Wurzel dividirt.

Also $\sqrt{a^m} = a^{\frac{m}{2}}$	$\sqrt[4]{a^m} = a^{\frac{m}{4}}$
$\sqrt[3]{a^m} = a^{\frac{m}{3}}$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

So oft nun bei der Division der Exponenten der Quotus eine ganze Zahl wird, so oft läßt sich die Wurzel rein finden; widrigenfalls ist die Wurzelgröße irrational.

Anmerkung. Auch hier gilt die Ausnahme: wenn $x^{\frac{m}{n}} = y^{n \times \frac{m}{n}}$ ist; so ist z. B. die Größe $\sqrt{4^3}$ rational, wiewohl der Wurzelexponent in 3 nicht enthalten ist; denn 4 ist $= 2^2$: folglich $\sqrt{4^3} = \sqrt{2^6}$. (§. praec. Anmerk.)

§. 92.

Man kann nun nach Belieben eine Wurzelgröße, ihres Werthes unbeschadet, auf einen andern Ausdruck bringen, wenn man die beiden Exponenten, den der Wurzel und den ihrer Größe, mit einer und der nämlichen Zahl multiplizirt oder dividirt; z. B.

$\sqrt{a} = \sqrt[4]{a^2} = \sqrt[6]{a^3} = \sqrt[8]{a^4}$; $\sqrt[6]{a^9} = \sqrt{a^3}$.

Denn diese Ausdrücke sind so viel als: $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{2}{4}}$, $a^{\frac{3}{6}}$, $a^{\frac{4}{8}} = a^{\frac{1}{2}}$; $a^{\frac{2}{6}} = a^{\frac{3}{2}}$.

Man lasse im ersten Beispiele $a = 4$ seyn; so ist: $\sqrt{4} = \sqrt{2.2} = 2$.

$$\sqrt[4]{a^2} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2.2.2.2} = 2.$$

$$\sqrt[6]{a^3} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2.2.2.2.2.2} = 2.$$

$$\sqrt[8]{a^4} = \sqrt[8]{256} = \sqrt[8]{2.2.2.2.2.2.2.2} = 2.$$

Aus gleichem Grunde läßt sich jede Würdengröße, deren Exponent eine ganze Zahl ist, in eine Wurzelgröße, d. i. in eine Würde umschaffen, welche zum Exponenten einen uneigentlichen Bruch hat.

Z. B. $a = \sqrt{a^2}$ oder $a^{\frac{2}{2}}$ oder $a = \sqrt[3]{a^3} = a^{\frac{3}{3}}$.

$a^2 = \sqrt{a^4} = a^{\frac{4}{2}}$.

Z. B. Es sey $a = 3$;

so ist $\sqrt{a^2} = \sqrt{9} = 3$, und $\sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{27} = 3$. u. s. w.

Hieraus gehen nun folgende Sätze hervor:

I. Die Wurzelgrößen lassen sich in jedem Falle in Würden mit gebrochenen Exponenten verwandeln; und wechselseitig.

II. Die Wurzelgrößen sind wahre Würden; also gelten bei ihnen die nämlichen Regeln, welche bisher für die Würden gegeben wurden.

III. Mit den Wurzelgrößen lassen sich die nämlichen Operationen vornehmen, wie mit den eigentlichen Würden, das heißt, man kann sie addiren, subtrahiren, multipliziren, dividiren, zu neuen Würden erheben, oder aus ihnen neue Wurzeln ausziehen.

§. 93.

Aufgabe. Wurzelgrößen zu addiren oder zu subtrahiren.

Auflösung. Man betrachte sie als Würden mit gebrochenen Exponenten, und behandle sie wie eigentliche Würden.

Bei gleichartigen Wurzelgrößen läßt sich die Addition und Subtraktion wirklich verrichten, bei ungleichartigen bloß anzeigen.

Beispiel. $3\sqrt{a} - 4\sqrt{a^3} + 6\sqrt{a} - 2\sqrt{a} = 7\sqrt{a} - 4\sqrt{a^3}$ oder

$$3a^{\frac{1}{2}} - 4a^{\frac{3}{2}} + 6a^{\frac{1}{2}} - 2a^{\frac{1}{2}} = 7a^{\frac{1}{2}} - 4a^{\frac{3}{2}}.$$

* Beispiele über die Stammrechnungsarten zusammengesetzter Wurzelgrößen folgen §. 99—103.

§. 94.

Aufgabe. Ungleichnamige Wurzelgrößen gleichnamig zu machen. Z. B. $\sqrt{a}$ und $\sqrt[3]{b}$.

Auflösung.

I. Man verwandle die Wurzelgröße in eine Würde mit gebrochenem Exponenten $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ und $\sqrt[3]{b} = b^{\frac{1}{3}}$.

II. Bringe diese Exponenten auf gleichen Nenner:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3} = \frac{3, 2}{6}.$$

$$a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{6}}, \quad b^{\frac{1}{3}} = b^{\frac{2}{6}}.$$

III. Nun setze man den gemeinschaftlichen Nenner als Exponenten in das Wurzelzeichen, und lasse die Zähler als Exponenten der Größen stehen.

$$a^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{a^3}.$$

$$b^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{b^2}.$$

Z. B. Man mache gleichnamig: $\sqrt[m]{x^n}$ und $\sqrt[n]{y^m}$.

Operation: $\left.\begin{matrix} \sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}} \\ \sqrt[n]{y^m} = y^{\frac{m}{n}} \end{matrix}\right\} \frac{n}{m}, \frac{m}{n} = \frac{n^2, m^2}{mn};$

also $x^{\frac{n}{m}} = x^{\frac{n^2}{mn}}$ und $y^{\frac{m}{n}} = y^{\frac{m^2}{mn}}$;

folglich $x^{\frac{n^2}{mn}} = \sqrt[mn]{x^{n^2}}$, und $y^{\frac{m^2}{mn}} = \sqrt[mn]{y^{m^2}}$.

* Das nämliche Resultat wird auf kürzerm Wege erhalten, wenn man mit dem Wurzelexponenten jeder Wurzelgröße den Exponenten der Wurzel und der Würde der andern multiplizirt. Ist der Wurzelexponent der einen Größe in dem der

andern enthalten; so braucht nur von ersterer der Exponent der Würde und der Wurzel mit dem Quotienten multiplizirt zu werden, welcher angibt, wie oft der eine Wurzelexponent im andern enthalten ist. Z. B. Man mache gleichnamig: 1) $\sqrt[3]{a^2}$ und $\sqrt[4]{a^3}$, 2) $\sqrt{a^3}$ und $\sqrt[4]{a}$.

Operation: 1) $\sqrt[3.4]{a^{2.4}}$, $\sqrt[4.3]{a^{3.3}} = \sqrt[12]{a^8}$, $\sqrt[12]{a^9}$;

2) $\sqrt[2.2]{a^{3.2}}$, $\sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{a^2}$, $\sqrt[4]{a}$, weil $4:2=2$. Vgl. §. 92.

§. 95.

Aufgabe. Wurzelgrößen mit einander zu multipliziren.

Auflösung. I. Sind die Wurzelgrößen gleichnamig, so multiplizire man die Größen vor und nach dem Wurzelzeichen mit einander.

II. Sind sie ungleichnamig, so mache man sie gleichnamig, und verfahre wie vorher.

Z. B. $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

Beweis. $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = a^{\frac{1}{2}} \times b^{\frac{1}{2}} = (ab)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{ab}$; d. i. so wie es erlaubt ist, den zu mehreren Größen gemeinschaftlich gehörigen Exponenten, nach Parenthesen, einmal anzuschreiben; eben so kann man auch das zu mehreren Faktoren gehörige Wurzelzeichen vom nämlichen Grade einmal setzen: also $\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}\sqrt{d} = \sqrt{abcd}$.

Beispiele. 1) $5\sqrt{p} \times 3\sqrt{q} \times 2\sqrt{r} = 30\sqrt{pqr}$.

2) $2\sqrt{a} \times 3\sqrt[3]{b} \times 4\sqrt[4]{c} = 2a^{\frac{1}{2}} \times 3b^{\frac{1}{3}} \times 4c^{\frac{1}{4}}$

$= 2a^{\frac{6}{12}} \times 3b^{\frac{4}{12}} \times 4c^{\frac{3}{12}} = 2\sqrt[12]{a^6} \times 3\sqrt[12]{b^4} \times 4\sqrt[12]{c^3} =$

$24\sqrt[12]{a^6 b^4 c^3}$.

3) $a\sqrt[m]{x^n} \times b\sqrt[n]{y^m} = ax^{\frac{n}{m}} \times by^{\frac{m}{n}}$

$= ax^{\frac{n^2}{mn}} \times by^{\frac{m^2}{mn}} = a\sqrt[mn]{x^{n^2}} \times b\sqrt[mn]{y^{m^2}} = ab\sqrt[mn]{x^{n^2}y^{m^2}}$.

Anmerkung. Es ist zwar $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = (\sqrt{-a})^2 = -a$ (§. 85). Soll aber eine imaginäre Wurzelgröße $n\sqrt{-a}$ mit

einer andern $m\sqrt{-b}$ multiplizirt werden (also nicht mit sich selbst), so wird das Produkt =

$$mn\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}.$$

Häufig wird eine solche Multiplikation nicht bloß angezeigt, sondern wirklich vorgenommen, und zwar in der Art, daß $n\sqrt{-a} = n\sqrt{a} \cdot \sqrt{-1}$ und $m\sqrt{-b} = m\sqrt{b} \cdot \sqrt{-1}$, das Produkt $= mn\sqrt{ab} \cdot (\sqrt{-1})^2 = -mn\sqrt{ab}$ gesetzt wird. In den beiden Multiplikationsfällen wird aus unmöglichen Faktoren ein mögliches Produkt erhalten, indem jene Form, durch welche die Faktoren als unmögliche Größen erscheinen, aufgehoben wird. Die unmöglichen Größen sind in der Analysis sehr wichtig, indem sie manchmal, wo sie als Resultat des Kalkuls erscheinen, zeigen, daß die in solchen Formen erscheinenden Größen nach den angenommenen Bedingungen nicht mit einander verbunden werden können, manchmal auch reelle Größen in sich enthalten, welche zum Vorschein kommen, sobald jene Form der Unmöglichkeit durch eine passende Umänderung entfernt wird, z. B. bei der Kardans Regel ꝛc.

§. 96.

Aufgabe. Wurzelgrößen durch einander zu dividiren.

Auflösung. I. Sind die Wurzelgrößen gleichnamig, so dividire man die Größen vor und nach dem Wurzelzeichen durch einander.

$$\text{Z. B. } 20\sqrt{a^3} : 5\sqrt{a} = \frac{20\sqrt{a^3}}{5\sqrt{a}} = 4\sqrt{\frac{a^3}{a}} = 4\sqrt{a^2} = 4a.$$

II. Sind sie aber ungleichnamig, so mache man sie gleichnamig, und verfahre wie vorher.

Anmerkung. Das ganze Verfahren ergibt sich aus dem Begriffe der Division als Gegensatz der Multiplikation; und anstatt zu sagen:

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{d}}$, sagt man kürzer $\sqrt{\frac{a}{d}}$; so wie anstatt $\frac{a^{\frac{1}{2}}}{d^{\frac{1}{2}}}$ kürzer $\left(\frac{a}{d}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Beispiele. 1) $24\sqrt{c} : 12\sqrt[3]{cd} = 24c^{\frac{1}{2}} : 12(cd)^{\frac{1}{3}}$

$$= \frac{24c^{\frac{3}{6}}}{12(cd)^{\frac{2}{6}}} = \frac{24}{12}\left(\frac{c^3}{(cd)^2}\right)^{\frac{1}{6}} = 2\sqrt[6]{\frac{c}{d^2}}.$$

2) $a\sqrt[m]{xy} : b\sqrt[n]{x} = a(xy)^{\frac{1}{m}} : bx^{\frac{1}{n}}$.

$$= \frac{a}{b} \frac{(xy)^{\frac{n}{mn}}}{x^{\frac{m}{mn}}} = \frac{a}{b} \times \left(\frac{(xy)^n}{x^m}\right)^{\frac{1}{mn}} = \frac{a}{b}\sqrt[mn]{x^{n-m}y^n}.$$

Anmerkung. $\frac{c\sqrt{-a}}{d\sqrt{-a}} = \frac{c}{d}$.

$$\frac{mn\sqrt{-a}\ \sqrt{-b}}{m\sqrt{-a}} = n\sqrt{-b}.$$

§. 97.

Aufgabe. Wurzelgrößen zu potenziren.

Auflösung. Man erhebe die Größe hinter dem Wurzelzeichen zur verlangten Würde, d. i. multiplizire ihren Exponenten durch den der neuen Würde; z. B.

$$(\sqrt{m})^2 = \sqrt{m^2} = m.$$

Denn $(\sqrt{m})^2 = (m^{\frac{1}{2}})^2 = m^{\frac{2}{2}} = m^1 = m$.

Beispiele.

I. $(\sqrt[3]{x^2})^2 = \sqrt[3]{x^4} = x^{\frac{4}{3}} = x^{1\frac{1}{3}} = x \times x^{\frac{1}{3}} = x\sqrt[3]{x}$.

So kann man in allen Fällen, wo der Exponent der Würde größer ist, als der der Wurzel, die Division verrichten, und den rationalen Theil vor das Wurzelzeichen setzen, den irrationalen aber, wenn einer bleibt, hinter dasselbe.

Zusatz 1. Man setze in dem letzten Beispiele $\sqrt[3]{x^4}$; es sey $x = 5$, so wird $\sqrt[3]{x^4} = \sqrt[3]{5^4} = \sqrt[3]{5^3 . 5} = 5\sqrt[3]{5}$.

Zusatz 2. Aus gleichem Grunde ist $\sqrt{y^5} = \sqrt{y^4 . y} = y^2\sqrt{y}$.

Es sey $y = 2$;

so wird $\sqrt{y^5} = \sqrt{2^5} = \sqrt{2^4 . 2} = 2^2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

II. $(\sqrt[m]{x^n})^\pi = \sqrt[m]{x^{n\pi}}$.

§. 98.

Aufgabe. Aus Wurzelgrößen neue Wurzeln auszuziehen.

Auflösung. Man multiplizire die Wurzelexponenten durch einander; denn dieses heißt eben so viel, als die Wurzelgröße

größe in eine Würde mit gebrochenem Exponenten verwandeln, und diesen durch den neuen Wurzelexponenten dividiren. (Vgl. §. 91).

Z. B. $\sqrt{}$ aus $\sqrt{a} = \sqrt[4]{a}$; denn $(a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$;

und $\sqrt{}$ aus $\sqrt[3]{b} = \sqrt[6]{b}$; — $(b^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = b^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{b}$.

* Es sey $a = 625$, folglich $\sqrt{625} = 25$;

und wieder $\sqrt{25} = 5$, oder $\sqrt[4]{5.5.5.5} = 5$.

Um also die vierte Wurzel aus einer Größe zu ziehen, suche man zuerst die Quadratwurzel, und ziehe aus dieser noch einmal die zweite Wurzel.

** Es sey $= 4096$, so erhält man

$$\sqrt[6]{4096} = \sqrt[3]{\sqrt{4096}} = \sqrt[3]{64} = 4.$$

Beispiele.

I. $\sqrt[3]{(\sqrt[4]{a})} = + \sqrt[12]{a}$.

* Im Falle bei der ersten Wurzelgröße ein Faktor stünde, müßte man damit die ganze Wurzelgröße noch multipliziren. Steht aber ein Faktor bei der zweiten Wurzelgröße, so schafft man ihn kürzer hinter die Wurzel.

II. $\frac{1}{3}\sqrt{(\sqrt[3]{c})} = \frac{1}{3}\sqrt[6]{c}$.

III. $\sqrt[m]{(a\sqrt[n]{x})} = \sqrt[m]{(\sqrt[n]{a^n x})} = \sqrt[mn]{a^n x}$.

* Es sey $m = 2$, $n = 3$, $a = 2$, $x = 8$; so erhält man

$$\sqrt{(2\sqrt[3]{8})} = \sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt{4} = 2.$$

oder auch $\sqrt{(2\sqrt[3]{8})} = \sqrt{2.2} = 2$.

Anmerkung. Da die zusammengesetzten Wurzelgrößen oder Irrationalzahlen in der Lehre von den höhern Gleichungen durchaus vorkommen, so schien es nothwendig, die Rechnungsarten mit solchen Größen eigens — aber ganz kurz zu behandeln.

B. Stammrechnungsarten mit zusammengesetzten Irrationalgrößen.

§. 99.

Aufgabe. Irrationalgrößen zu addiren und subtrahiren.

Auflösung. I. Man schreibe Gleichartiges unter Gleichartiges.

II. Addire oder subtrahire die Koeffizienten gleichartiger Wurzelgrößen, und befolge übrigens alle Regeln, die bei der Addition und Subtraktion der Buchstabengrößen gegeben worden.

III. Manchmal läßt sich die Gleichartigkeit zweier Größen durch Ausziehung der Wurzel aus einem rationalen Faktor herstellen.

Beispiele. I.

$$\frac{5+3\sqrt{2}-7\sqrt{3}}{12-4\sqrt{2}+3\sqrt{3}}$$
$$17-\sqrt{2}-4\sqrt{3}.$$

II.

$$\frac{3\sqrt{5}-\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{-1}+2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}+\sqrt{27}-\sqrt{8}+\sqrt{-4}-4\sqrt{\tfrac{3}{4}}}$$

gleichartig gemacht:

$$\frac{3\sqrt{5}-\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{-1}+2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}+3\sqrt{3}-2\sqrt{2}+2\sqrt{-1}-2\sqrt{3}}$$

Summe: $5\sqrt{5}+2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{-1}$

Probe:

$$\frac{2\sqrt{5}+3\sqrt{3}-2\sqrt{2}+2\sqrt{-1}-2\sqrt{3}}{-\quad-\quad+\quad-\quad+}$$
$$3\sqrt{5}-\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{-1}+2\sqrt{3}.$$

III.

$$\frac{3\sqrt{7}-\sqrt{-2}}{-(2\sqrt{7}+\sqrt{-8})^*}$$
$$\sqrt{7}-3\sqrt{-2}$$

Probe:

$$\frac{+\ 2\sqrt{7}+\sqrt{-8}}{3\sqrt{7}-\sqrt{-2}.}$$

$^*\sqrt{-8} = \sqrt{4}\times-2 = 2\sqrt{-2}.$

IV.

$$\frac{\sqrt{am^2}-5\sqrt{ab}+3\sqrt{ab^2}-5\sqrt[3]{a^3b}}{-(2m\sqrt{a}-3\sqrt{ab}-2\sqrt{a^3}+2\sqrt[3]{b^4})}$$

gleichartig gemacht:

$$\frac{m\sqrt{a}-5\sqrt{ab}+3b\sqrt{a}-5a\sqrt[3]{b}}{-(2m\sqrt{a}+3\sqrt{ab}-2a\sqrt{a}+2b\sqrt[3]{b})}$$
$$\frac{-\quad-\quad+\quad-}{-m\sqrt{a}-8\sqrt{ab}+(3b+2a)\sqrt{a}-(5a+2b)\sqrt[3]{b}}$$

Probe:

$$\frac{2m\sqrt{a}+3\sqrt{ab}-2a\sqrt{a}+2b\sqrt[3]{b}}{m\sqrt{a}-5\sqrt{ab}+3b\sqrt{a}-5a\sqrt[3]{b}.}$$

§. 100.

Aufgabe. Irrationalgrößen durch einander zu multipliziren.

Auflösung. I. Man multiplizire jedes Glied des Multiplikands durch jedes des Multiplikators.

II. Bestimme die einzelnen Produkte nach §. 95, und addire sie nach den Regeln der Addition.

Beispiele.

I. $1 + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{-1}$

$1 - \sqrt{3}$

$1 + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{-1}$

$-\sqrt{3} - 2\sqrt{9} + 3\sqrt{-3}$

$1 + \sqrt{3} - 3\sqrt{-1} + 3\sqrt{-3} - 2\sqrt{9}^{*}$

Produkt: $-5 + \sqrt{3} - 3\sqrt{-1} + 3\sqrt{-3}$

$^{*} -2\sqrt{9} = -2 \times 3 = -6.$

II. Welches ist der Kubus von $\frac{-3-3\sqrt{-3}}{2}$?

Auflösung. Man kubire zuerst den Zähler, dann den Nenner.

$-3-3\sqrt{-3}$	$-18+18\sqrt{-3}$
$-3-3\sqrt{-3}$	$-3-3\sqrt{-3}$
$+9+9\sqrt{-3}$	$+54-54\sqrt{-3}$
$+9\sqrt{-3}+9.-3$	$+54\sqrt{-3}-54\times-3$
$-18+18\sqrt{-3}$ Quadrat.	216 Kubus v. $(-3-3\sqrt{-3})$.

Der Nenner 2 gibt zum Kubus 8, folglich:

$$\left(\frac{-3-3\sqrt{-3}}{2}\right)^{3} = \frac{216}{8} = 27.$$

III. Welches ist das Produkt aus $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{c-b^2}$ und $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{c-b^2}$?

Auflösung. $\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}\times(c-b^2) = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c + \frac{1}{4}b^2$

$$= \frac{a^2-c+b^2}{4}.$$ (Vergl. §. 32. I.)

IV. $(3ab-2\sqrt{ab^3}+4\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[4]{ab^3}-6\sqrt[m]{a^2b^{m+1}})\times 2\sqrt{ab^3} =$

$6\sqrt{a^3b^5} - 4ab^3 + 8\sqrt[6]{a^7b^{11}} + 2\sqrt[4]{a^3b^7} - 12\sqrt{a^{m+4}b^{6m+2}}.$

Denn $3ab \times 2\sqrt{ab^3} = 3\sqrt{a^2b^2} \cdot 2\sqrt{ab^3} = 6\sqrt{a^3b^5}$

$-2\sqrt{ab^3} \cdot 2\sqrt{ab^3} = -4(\sqrt{ab^3})^2 = -4ab^3$

$4\sqrt[3]{a^2b} \cdot 2\sqrt{ab^3} = 4\sqrt[5.2]{a^{2.2}b^{1.2}} \times 2\sqrt[2.5]{a^{1.3}b^{5.5}} = 8\sqrt[6]{a^7b^{11}}$

$\sqrt[4]{ab^3} \cdot 2\sqrt{ab^3} = \sqrt[4]{ab} \cdot 2\sqrt[4]{a^2b^6} = 2\sqrt[4]{a^3b^7}$

$-6\sqrt[m]{a^2b^{m+1}} \times 2\sqrt{ab^3} = -6\sqrt[m.2]{a^{2.2}b^{(m+1)2}} \times 2\sqrt[2.m]{a^{1.m}b^{5.m}} =$

$-6\sqrt[2m]{a^4b^{2m+2}} \times 2\sqrt[2m]{a^mb^{5m}} = -12\sqrt[2m]{a^{m+4}b^{5m+2}}.$

V. $2\sqrt{-3} - 3\sqrt{-2} + 3\sqrt{-6}$

$2\sqrt{-2} - 3\sqrt{-3}$

$4\sqrt{-3}.\sqrt{-2} - 6(\sqrt{-2})^2 + 6\sqrt{-2}.\sqrt{-2}.\sqrt{+3}$ * =

$4\sqrt{-3}.\sqrt{-2} + 12 - 12\sqrt{3}$

$-6(\sqrt{-3})^2 + 9\sqrt{-2}.\sqrt{-3} - 9\sqrt{-3}.\sqrt{-3}.\sqrt{2} =$

$+ 18 + 9\sqrt{-2}.\sqrt{-3} + 27\sqrt{2}$

$30 + 13\sqrt{-3}.\sqrt{-2} - 12\sqrt{3} + 27\sqrt{2}.$

* $3\sqrt{-6} \times 2\sqrt{-2} = 3\sqrt{-2.3} \times 2\sqrt{-2} = 3\sqrt{-2}.\sqrt{3} \times 2\sqrt{-2}$

$= 6(\sqrt{-2})^2.\sqrt{3} = 6. -2.\sqrt{3} = -12\sqrt{3}.$

§ 101.

Aufgabe. Irrationalgrößen durch einander zu dividiren.

Auflösung. I. Kommen im Divisor nur Quadratwurzel-Größen vor; so schreibe man die Division in Gestalt eines Bruches an, und multiplizire, um den Nenner rational zu machen, Zähler und Nenner mit einer Größe, welche sich vom gegebenen Divisor nur durch das Zeichen im zweiten Gliede unterscheidet. Es werden dann im Nenner Summe und Differenz von Quadratwurzel-Größen multiplizirt; daher muß das Produkt die Differenz von rationalen Größen werden. (§. 32 und 85). Hat der Divisor drei Glieder, so muß das Verfahren wiederholt werden.

II. Sind im Dividend und Divisor auch andere Wurzelgrößen gegeben, so werden sie nach §. 96 dividirt, oder auch nach §. 36. V.

Beispiele.

I. $(24 + 2\sqrt{2} - 15\sqrt{4}) : (6 + 5\sqrt{2})$.

II. $\frac{3}{\sqrt{10} - \sqrt{2} - \sqrt{3}}$.

III. $\frac{a^2-(c-b^2)}{a-\sqrt{c-b^2}}$.

IV. $\left(1-\frac{a+c}{4x^2}-\frac{4x^2}{\sqrt{a+c}}+2x\right):\left(1+\frac{\sqrt{a+c}}{2x}-\frac{4x^2}{\sqrt{a+c}}\right)$.

V. $(3ab-\sqrt{ab}+9\sqrt[3]{a^2b}+6\sqrt[6]{a^2b^3}-\sqrt[m]{ab^{m-1}}):3\sqrt[3]{ab}$.

Operation.

I. $\frac{24+2\sqrt{2}-15\sqrt{4}}{6+5\sqrt{2}}=\frac{-6+2\sqrt{2}}{6+5\sqrt{2}}=\frac{-6+2\sqrt{2}}{6+5\sqrt{2}}\times\frac{6-5\sqrt{2}}{6-5\sqrt{2}}$

$=\frac{-56+42\sqrt{2}}{-14}=4-3\sqrt{2}$.

II. $\frac{3}{\sqrt{10}-\sqrt{2}-\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{10}+3\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{5-2\sqrt{6}}$

$=\frac{3\sqrt{10}+3\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{5-2\sqrt{6}}\times\frac{5+2\sqrt{6}}{5+2\sqrt{6}}$

$=\frac{15\sqrt{10}+27\sqrt{3}+33\sqrt{2}+12\sqrt{15}}{x}$.

III. $\frac{a^2-(c-b^2)}{a-\sqrt{c-b^2}}\times\frac{a+\sqrt{(c-b^2)}}{a+\sqrt{(c-b^2)}}=\frac{(a^2-(c-b^2))(a+\sqrt{(a-b^2)})}{a^2-(c-b^2)}$

$=a+\sqrt{(c-b^2)}$

IV.

$1-\frac{a+c}{4x^2}-\frac{4x^2}{\sqrt{(a+c)}}+2x$	$-$	$1-\frac{\sqrt{(a+c)}}{2x}$
$\left(1+\frac{\sqrt{a+c}}{2x}-\frac{4x^2}{\sqrt{(a+c)}}\right)$		b
$-\quad-\qquad+$		
$-\frac{\sqrt{(a+c)}}{2x}-\frac{a+c}{4x^2}+2x$		
$-\frac{\sqrt{(a+c)}}{2x}-\frac{a+c}{4x^2}+2x$		
$+\qquad+\qquad-$		
ϕ		

V. $(3ab-\sqrt{ab}+9\sqrt[3]{a^2b}+6\sqrt[6]{a^2b^3}-\sqrt[m]{ab^{m-1}}):3\sqrt[3]{ab}=$

$\sqrt[3]{a^2b^2}-\frac{1}{3}\sqrt[6]{ab}+3\sqrt[3]{a}+2\sqrt[6]{b}-\frac{1}{3}\sqrt[3m]{a^{5-m}b^{2m-3}}$.

§. 102.

Beispiele der Reduktion.

$$1)\ \sqrt{\frac{3a\sqrt{bc^2}}{4b\sqrt{ac}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{9a^2bc^2}}{\sqrt{16ab^2c}}} = \sqrt[4]{\frac{9ac}{16b}}$$

$$2)\ \frac{3a}{(1-a)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(1-a)^{\frac{1}{2}}} = \frac{3a}{(1-a)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1-a}{(1-a)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4a-1}{(1-a)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{4a-1}{(1-a)\sqrt{1-a}}.$$

$$3)\ \sqrt{a}+\sqrt{b}-\left(\frac{2\sqrt{ab}+a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right) = \frac{a+2\sqrt{ab}+b-2\sqrt{ab}-a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$= \frac{b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{b(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}.$$

Zweites Hauptstück.

Würdenlehre mehrtheiliger Größen.

Erster Artikel.

Vom Quadrate.

§. 103.

Wenn man eine Zahl mit sich selbst multiplizirt, so heißt das Produkt das Quadrat dieser Zahl, die Zahl selbst in Beziehung auf jenes Quadratwurzel, z. B. $3\times3=9$. Hier ist 9 das Quadrat von 3; der einfache Faktor 3 aber die Wurzel von 9. Man erhält das Quadrat jeder Größe, wenn man sie mit sich selbst multiplizirt.

Die Quadratzahlen der neun Zahlziffern sind folgende:

Wurzeln:	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Quadrate:	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.

Da $10^2 = 100$, und 100 bereits mit drei Ziffern geschrieben ist, so ist die Wurzel aus einer zweizifferigen Zahl, so weit sie aus Ganzen besteht, immer nur einzifferig. — Das Zeichen der Quadratwurzel ist $\sqrt{\ }$, z. B. $\sqrt{100} = 10$.

* Die Benennung Quadrat ist aus der Geometrie genommen, wo der Inhalt eines Quadrates, d. i. eines gleichseitigen und rechtwinklichten Vierecks gefunden wird, wenn man die Zahl, welche die Größe einer Seite desselben ausdrückt, mit sich selbst multiplizirt. Z. B.

. . .
. . . $3 \times 3 = 9$.

§. 104.

Aus der Lehre von Potenzen überhaupt ergeben sich die Folgesätze:

I. Das Quadrat jeder ganzen Zahl ist wieder eine ganze Zahl.

II. Brüche werden zum Quadrate erhoben, wenn man Zähler mit Zähler, Nenner mit Nenner multiplizirt. Gemischte Zahlen verwandelt man zuerst in einen unächten Bruch.

Z. B. $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$

$\left(1\frac{5}{6}\right)^2 = \left(\frac{11}{6}\right)^2 = \frac{11 \times 11}{6 \times 6} = \frac{121}{36} = 3\frac{13}{36}$.

* Wenn die Wurzel einen Bruch $\frac{a}{b}$ enthält, muß auch das Quadrat einen solchen enthalten; denn wenn Zähler a und Nenner b in der Wurzel Primzahlen (unter sich oder absolute) sind, so bleiben sie auch im Quadrate Primzahlen unter sich; weil a^2 und b^2 keine andern Faktoren enthalten können, als a und b. Wenn daher die Wurzel aus einer Zahl, z. B. $\sqrt{3}$ keine ganze Zahl ist, so kann sie auch kein Bruch seyn, weil sonst ein solcher zum Quadrate erhoben, eine ganze Zahl geben müßte. Es kann die Wurzel aus solchen Zahlen nur annäherungsweise bestimmt werden: sie sind Irrationalzahlen.

III. Erhebt man Dezimalbrüche zum Quadrate, so müssen die Dezimalen im Quadrate jederzeit paarweise erscheinen.

Z. B. $(0{,}6)^2 = 0{,}36$;
$(0{,}06) = 0{,}0036$;
$\left(\frac{a}{\delta^n}\right)^2 = \frac{a^2}{\delta^n \cdot \delta^n} = \frac{a^2}{\delta^{2n}} = a^2\delta^{-2n}$.

IV. Die Wurzel aus einer positiven Größe kann positiv oder negativ seyn, weil sowohl eine positive als negative Größe mit sich selbst multiplizirt ein positives Produkt gibt: $\sqrt{a^2} = \pm a$. Aus dem nämlichen Grunde kann aus einer negativen Größe keine Wurzel ausgezogen werden: $\sqrt{-a}$ ist eine unmögliche Größe. (Vergl. §. 78. Zus. 2 und §. 90).

§. 105.

Um die Quadratwurzel aus einem reinen Quadrate zu ziehen, das nur zweizifferig ist, hat man nur die Produkte der 9 Einheiten aus sich selbst zu wissen nothwendig.

Z. B. $\sqrt{81} = \pm 9$. $\sqrt{64} = \pm 8$. $\sqrt{36} = \pm 6$ u. s. w.

Um aus drei oder mehrzifferigen Zahlen, so wie aus mehrtheiligen Buchstabengrößen die Quadratwurzel auszuziehen, muß man die Gesetze kennen, nach welchen das Quadrat mehrtheiliger Größen gebildet wird.

I. Da $a+b$ jede zweitheilige Größe ausdrückt, so wird

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2+2ab+b^2$$

das allgemeine Gesetz für das Quadrat zweitheiliger Größen auszudrücken; d. i. ein solches enthält:

1) das Quadrat des ersten Theils,
2) das doppelte Produkt beider Theile,
3) das Quadrat des zweiten Theils.

II. In $(a+b+c)^2$ setze man $a+b=p$, so ist

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 = (p+c)^2 &= p^2+2pc+c^2\\ &= (a+b)^2+2(a+b)c+c^2\\ &= a^2+2ab+b^2\\ &\quad +2(a+b)c+c^2,\end{aligned}$$

d. i. bei dem Quadrate einer dreitheiligen Größe kommt zu den Theilen des Quadrates einer zweitheiligen Größe noch das dop-

pelte Produkt aus der Summe der beiden ersten Theile in den dritten Theil und das Quadrat des dritten Theils.

III. Auf die nämliche Art erhält man, wenn in der Wurzel noch ein neues Glied hinzukommt, für das Quadrat einer solchen Größe, außer den bereits erhaltenen Theilen, noch das doppelte Produkt der Summe der vorausgehenden Theile in das neu hinzugekommene Glied, und das Quadrat von diesem.

$$(a+b+c+d) = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2 + 2(a+b+c)d + d^2.$$

§. 106.

Wenn eine Wurzel A von n Zifferstellen zum Quadrate erhoben wird, so kann dieses nicht mehr als 2n und nicht weniger als $2n-1$, d. i. nicht mehr als doppelt so viel, und nicht weniger als doppelt so viel, weniger eine, Zifferstellen enthalten, als die Wurzel.

Beweis. I. $A < 10^n$, indem 10^n nach 1 noch n Nullen (§. 72. VII.), also im Ganzen $n+1$ Ziffern hat; folglich $A^2 < 10^{2n}$. Da 10^{2n} die kleinste Zahl mit $2n+1$ Ziffern ist, (es wird mit 2n Nullen und 1 geschrieben); so kann A^2 nicht mehr als 2n Ziffern enthalten.

II. $A > 10^{n-1}$, indem 10^{n-1} die kleinste Zahl ist, welche mit $(n-1)+1=n$ Ziffern geschrieben wird; folglich $A^2 > 10^{2n-2}$. Es ist 10^{2n-2} die kleinste Zahl mit $(2n-2)+1 = 2n-1$ Ziffern; mithin kann A^2 nicht weniger als $2n-1$ Ziffern enthalten.

Zusatz. Wird ein Quadrat von der Rechten zur Linken in Klassen von je zwei Ziffern abgetheilt; so erhält man eben so viele Klassen, als die Wurzel Ziffern hat, wobei die erste Klasse zwei oder auch nur eine Ziffer haben kann.

§. 107.

Will man eine Zahl nach den im §. 105 aufgestellten Formeln zum Quadrat erheben, so theilt man sie nach der Dekadik in Summanden ab, und verfährt nach den folgenden Beispielen.

Man erhebe die Zahlen 93, 246 zum Quadrate.

Auflösung.

Für $(93)^2 = (90+3)^2$ ist

$a = 90$

$b = 3$

$a^2 = 90^2 = 8100$

$2ab = 2.90.3 = 540$

$b^2 = 3^2 = 9$

$(93)^2 = 8649$

Für $(246)^2 = (200+40+6)^2$

ist $a = 200$, $b = 40$, $c = 6$

$a^2 = 200^2 = 40000$ (§. 78. Zus. 3)

$2ab = 2.200.40 = 16000$

$b^2 = 40^2 = 1600$

$2(a+b)c = 2.240.6 = 2880$

$c^2 = 6^2 = 36$

$(246)^2 = 60516$

In den beiden Beispielen können die am Ende der einzelnen Glieder angehängten Nullen auch hinweggelassen werden, wenn man jedes folgende Glied um eine Stelle weiter zur Rechten rückt. Theilt man zugleich die Quadrate in Klassen von zwei Stellen ab:

$(93)^2 = (9.+3)^2$

a^2	$= 81$	
$2ab$	$= 5$	4
b^2	$=$	9
$(93)^2$	$= 86$	49

$(246)^2 = (2..+4.+6)^2$

a^2	$= 4$		
$2ab$	$= 1$	6	
b^2	$=$	16	
$2(a+b)c$	$=$	28	8
c^2	$=$		36
$(246)^2$	$= 6$	05	16

so sieht man, daß die letzte Ziffer von a^2 bis zur letzten Ziffer der ersten Klasse; die letzte Ziffer von $2ab$ bis zur ersten, von b^2 bis zur letzten Ziffer der zweiten Klasse; von $2(a+b)c$ bis zur ersten, von c^2 bis zur letzten Ziffer der dritten Klasse reiche. Hat eine Wurzel mehr als drei Ziffern, so reicht die letzte Ziffer von jedem doppelten Produkte der vorausgehenden Ziffern in die nächstfolgende bis zur ersten, das Quadrat von der zuletzt genommenen Ziffer bis zur letzten Stelle jeder Klasse.

* Allgemeiner kann dieser Satz so bewiesen werden.

Es drücke m_1, m_2, m_3 .... die erste, zweite, dritte .... Ziffer ohne Lokalwerth aus, so ist:

$(a+b)^2 = (m_1.10 + m_2)^2$ (§. 78. Zus. 3)

$a^2 = m_1^2.10^2$ von der 3ten Ordnung; es folgen noch 2 Ziffern;

$2ab = 2.m_1.m_2.10$ " " 2ten " " " folgt noch 1 Ziffer.

$b^2 = m_2^2$ " " 1sten " " " keine Ziffer mehr.

Eben so ist $(a+b+c)^2=(m_1.10^2+m_2.10+m_3)^2$, und

$a^2 = m_1^2.10^4$ von der 5ten Ordnung, es folgen noch 2 Paare von Ziffern;

$2ab = 2m_1.m_2.10^3$ " " 4ten " " es folgen noch 2 Paare weniger eine;

$b^2 = m^2.10^2$ " " 3ten " " es folgt noch 1 Paar;

$2(a+b)c = 2(m_1.10^2+m_2.10)m_3 = 2(m_1.10+m_2)m_3.10$; es folgt noch 1 Ziffer.

$c^2 = m_3^2$, v. d. 1sten Ordnung: es ist die letzte Ziffer.

Für eine größere Anzahl von Ziffern ist der Beweis der nämliche.

** Das Erheben einer mehrzifferigen Zahl zum Quadrate nach der Formel ist dann besonders vortheilhaft, wenn man für die erstern Ziffern das Quadrat anderwärtsher, z. B. aus den am Ende angehängten Tafeln kennt. Z. B. Für $(8315)^2$ steht in den Tafeln $831^2 = 690561$; setzt man dieses $= a^2$ und $831 = a$, $5 = b$, so ist

$$\begin{array}{rr} a^2 = & 690561 \\ 2ab = 2.831.5 = & 8310 \\ b^2 = & 25 \\ \hline (8315)^2 = & 69149225. \end{array}$$

*** Ueber den Gebrauch der Quadrat- und Kubiktafeln siehe unten §. 122.

§. 108.

Aufgabe. Aus einer Quadratzahl, die nicht über vier Ziffern hat, z. B. aus 1369, die Wurzel zu finden.

Die Auflösung beruht auf den §. 106 u. 107 angegebenen Sätzen.

I. Man theile die Zahl von der Rechten zur Linken in Klassen von je zwei Ziffern; doch kann die letzte Klasse zur Linken auch aus einer Ziffer bestehen.

II. Nun ziehe man von der höchsten Klasse das ihr am nächsten kommende Quadrat eines der neun Zahlziffern ab, und schreibe die Wurzel davon beiseite.

III. Man setze zum allenfallsigen Reste die nächste Klasse herab, verdoppele die eben gefundene Wurzel, und dividire damit

so, daß die niedrigste Ziffer der doppelten Wurzel unter die Zehnerstelle der neuen Klasse zu stehen kommt.

IV. Den neuen Quotienten schreibe man als zweiten Theil der Wurzel beiseite, und zugleich in die leer gelassene Stelle des Divisors, und multiplizire damit den ganzen Divisor, und ziehe das Produkt vom Dividende ab. Ist der Rest = 0, so ist die Rechnung zu Ende und der verlangte Quotus gefunden.

Operation. $\sqrt{\ 13|69}$ (ab / 37

$a^2 = {}^{*}9$

469

$2a + b = 67^{**}$

$2ab + b^2 = 469$

0.

Probe. 37 · 37 = 259 + 111 = 13|69

* Nächstes Quadrat.

** 6 ist das Doppelte des ersten Theils der Wurzel (ohne Lokalwerth) = 2a; mußte daher, um durch Division von 2a in 2ab das b zu finden, als Divisor unter die herabgesetzte zweite Klasse so geschrieben werden, daß es bis zur ersten Stelle von dieser reichte, weil bis dahin nach §. 107 auch 2ab reicht. Diesem $2a = 6$ (eigentlich 60) wurde noch der Quotient $b = 7$ als zweiter Theil der Wurzel angehängt; dann wurde diese Summe $2a + b = 60 + 7 = 67$ noch mit b multiplizirt, oder $2ab + b^2$ bestimmt. Dieses Produkt wurde unter den Divisor so gesetzt, daß die letzte Ziffer von b^2 unter die letzte Ziffer der herabgesetzten Klasse zu stehen gekommen ist, und von den treffenden Stellen des Dividends abgezogen. Es wurden mithin vom gegebenen Quadrate alle Theile, aus welchen es besteht, gehörig abgezogen, und daher ist die Wurzel richtig bestimmt.

§. 109.

Aufgabe. Aus was immer für einer Zahl, die ein vollkommenes Quadrat ist, und deren Wurzel aus mehr als zwei Ziffern besteht, diese Wurzel zu finden.

Auflösung. I. Man theile die gegebene Quadratzahl von der Rechten zur Linken in Klassen von je zwei Ziffern, wie §. 108.

II. Nun ziehe man von der ersten Klasse zur Linken das größte Quadrat einer der neun einfachen Wurzeln ab, das sich

subtrahiren läßt, und schreibe die Wurzel davon als ersten Theil der verlangten Wurzel (und als Quotienten) beiseite.

III. Zum allenfallsigen Reste der ersten Klasse setze man die folgende Klasse herab. Hierauf verdopple man die Wurzel, setze ihre niedrigste Ziffer unter die höchste der neuen Klasse, und dividire. Der Quotient ist der zweite Theil der Wurzel.

IV. Diesen gefundenen neuen Theil der Wurzel schreibe man auch zu dem Divisor, unter die letzte Zifferstelle des Dividends, multiplizire den so vermehrten Divisor durch den Quotienten, und ziehe das Produkt von den treffenden Zifferstellen des Dividends ab.

V. Zum Reste setze man die nächste Klasse herab, betrachte die bisher gefundene Wurzel als ersten Theil, und setze die Operation, wie bei Nro. III. und IV., so lange fort, bis alle Klassen herabgesetzt sind, und zuletzt kein Rest mehr übrig bleibt.

VI. So oft man auf die Nro. III. vorgeschriebene Art mit dem Divisor in das Dividend nicht dividiren kann, indem die treffenden Zifferstellen des letztern weniger betragen, als die des erstern, muß in der Wurzel als Quotus eine Nulle angeschrieben, eine neue Klasse herabgesetzt, und ein neuer Divisor gesucht werden.

VII. Sollte man das bei Nro. IV. sich ergebende Produkt vom Dividende nicht abziehen können, so wäre dieses ein Zeichen, daß man den Quotus zu hoch angesetzt habe; man muß ihn dann so lange vermindern, bis der Abzug angeht.

VIII. Für jede Klasse von zwei Nullen im Quadrate erhält die Wurzel eine einfache Nulle. — Ueberhaupt erhält die Wurzel so viele Zifferstellen, als die Quadratzahl Klassen hat.

I. Aufgabe. $\sqrt{}$ 1211736100.

Auflösung.

12,11,73,61,00 | 34810

$a^2 =$ 9 — 3

311

$2a+b =$ 64 — b

$2ab+b^2 =$ 256

5573

$2(a+b)+c =$ 688

$2(a+b)c+c^2 =$ 5504

6961

$2(a+b+c)d+d^2 =$ 6961

0.

II. Aufgabe. $\sqrt{}$ 81450625.

Auflösung.

81,45,06,25 | 9025
81 | b
45
18
4506
1802
3604
90225
18045
90225
0.

Anmerkung. Um zu erkennen, ob man in der Wurzel nicht eine Ziffer zu klein genommen habe, sehe man darauf, ob der Rest R nicht gleich dem Doppelten der bis dahin gefundenen Ziffern der Wurzel sammt 1 ($= 2n+1$), oder größer, als diese Summe sey. Im ersten Falle wäre die zuletzt bestimmte Ziffer der Wurzel um 1 zu klein; denn bliebe, nachdem man $\sqrt{A} = n$ bestimmt hat, noch $R = 2n+1$, so müßte $A = n^2 + R = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ seyn, mithin wäre nicht n, sondern $n+1$ die Wurzel. Im zweiten Falle, wo $R > 2n+1$ ist, könnte n noch um so weniger die Wurzel seyn.

§. 110.

Soll man die Quadratwurzel aus Fraktionen ziehen, welche reine Quadrate sind, so muß die Wurzel aus Zähler und Nenner besonders gezogen werden. — Gemischte Zahlen verwandelt man zuvor in einen uneigentlichen Bruch. — Manchmal geht das Geschäft des Wurzelausziehens erst vor sich, nachdem man die Fraktion verkleinert hat.

Beispiele.

I. $\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$.

II. $\sqrt{1\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$.

III. $\sqrt{\frac{147}{192}} \overset{3}{=} \sqrt{\frac{49}{64}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{64}} = \frac{7}{8}$.

IV. $\sqrt{\frac{289}{841}} = \frac{\sqrt{289}}{\sqrt{841}} = \frac{17}{29}$.

V. $\sqrt{\frac{8a^2b^4}{18c^2x^6}} \overset{2}{=} \sqrt{\frac{4a^2b^4}{9c^2x^6}} = \frac{\sqrt{4a^2b^4}}{\sqrt{9c^2x^6}} = \frac{2ab^2}{3cx^3}$.

§. 111.

Hat man die Quadratwurzel aus bloßen Dezimalen, oder Ganzen mit Dezimalen zu ziehen, welche aber reine Quadrate sind, so verfährt man wie bei Ausziehung der Wurzel aus Quadraten ganzer Zahlen. Nur hat man in der Wurzel so viele Zifferstellen der Ganzen und Dezimalen abzuschneiden, als im Quadrate Klassen von beiden waren.

1. Beispiel. $\sqrt{}$ 17,850625.

Auflösung. 17,85|06|25 (4,225
16

185
82
164

2106
842
1684

42225
8445
42225

0.

$^{*}\sqrt{17,850625} = \sqrt{\frac{17850625}{1000000}} = \frac{\sqrt{17850625}}{\sqrt{1000000}} = \frac{4225}{1000} = 4,225.$

II. $\sqrt{}$ 0,038416 = 0,196.

§. 112.

Hat man die Quadratwurzel aus Irrationalzahlen zu ziehen, so sind folgende Regeln zu beobachten:

I. Enthält die Irrationalzahl bloße Ganze, so verwandelt man sie in eine unendliche Reihe, indem man den Ganzen eine beliebige Anzahl paarweiser Nullen anhängt, und findet dann die Wurzel durch Annäherung in Dezimalen.

Z. B. $\sqrt{280} = \sqrt{280 \times \frac{1000000\ldots}{1000000\ldots}} = \sqrt{}230,000000.$

$$\sqrt{2|80,00|00|00} \quad (16,733....$$

1

180
(26)
156

2400
(327)
2289

11100
(3343)
10029

107100
(33463)
100389

6711 Rest.

* Um die Probe zu machen, muß man zum Produkte der Wurzel aus sich selbst auch noch den Rest addiren.

$$(16,733)^2 = 279,993289$$
$$+6711$$
$$280,000000 = 280.$$

II. Führt die Irrationalzahl auch Dezimalen bei sich, so ergänzt man letztere, wenn ihre Anzahl noch nicht gerade ist, zu lauter Paaren, d. i. Klassen von zwei Dezimalstellen, weil auch bei Erhebung eines Dezimalbruches zum Quadrate die Dezimalen paarweise abgeschnitten werden müssen, nämlich für jede Dezimale der Wurzel zwei Dezimalen im Quadrate. (§. 104. II.) Man kann, um aller Verwirrung vorzubeugen, die allenfalls vorhandenen Ganzen von der Rechten zur Linken, die Dezimalen aber von der Linken zur Rechten in Klassen eintheilen. Z. B.

$$\sqrt{17,5} = \sqrt{17,50} = \sqrt{17,50|00|00|00|}.$$
$$\sqrt{17,50000000} = 4,1833....$$

Verrichtet man die Operation nach den bisherigen Regeln, so bleibt nach Herabsetzung der vierten Klasse der Dezimalen als Rest

$$\frac{111}{(10000)^2} = 0,00000111.$$

Probe. $(4,1833)^2 = 17,49999889$
$+111$ $\Big\} = 17,5.$

III. Fraktionen, worin Zähler und Nenner irrational sind, verwandelt man entweder in einen Dezimalbruch, welcher nach Umständen

Umständen endlich oder unendlich werden kann; oder man macht, kürzer und bequemer, den Nenner der Fraktion rational, dadurch, daß man die Fraktion im Zähler und Nenner mit einem schicklichen Faktor multiplizirt, damit der Nenner der Fraktion, ihres Werthes unbeschadet, ein Quadrat werde. Dieser Faktor ist, in Ermanglung eines andern, immer der vorige Nenner selbst.

Ist der Nenner der Fraktion rational geworden, so behandelt man den irrationalen Zähler wie eine andere ganze Irrationalzahl, und dividirt am Ende die Wurzel aus dem Zähler durch die Wurzel aus dem Nenner.

Beispiele.

1) $\sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{0{,}60} = \sqrt{0{,}6000\ldots} = 0{,}77459\ldots$

2) $\sqrt{\frac{5}{6}} = \sqrt{0{,}83|33|33|\ldots} = 0{,}9128709.$

3) $\sqrt{\frac{7}{8}} = \sqrt{0{,}87|50|00|\ldots} = 0{,}9354143.$

* Diese Beispiele können auch so aufgelöset werden:

1) $\sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{3.5}{5.5}} = \sqrt{\frac{15}{25}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{15{,}0000\ldots}}{5} = \frac{3.87298\ldots}{5}$
$= 0{,}77459\ldots$

2) $\sqrt{\frac{5}{6}} = \sqrt{\frac{5.6}{6.6}} = \frac{\sqrt{30}}{6} = \frac{5{,}4772256}{6} = 0{,}9128709.$

3) $\sqrt{\frac{7}{8}} = \sqrt{\frac{7.2}{8.2}} = \frac{\sqrt{14}}{4} = \frac{3{,}7416574}{4} = 0{,}9354143.$

oder auch: $\sqrt{\frac{7}{8}} = \sqrt{\frac{7.8}{8.8}} = \sqrt{\frac{56}{64}} = \frac{\sqrt{56}}{8} = \frac{7{,}4833148}{8}$
$= 0{,}9354143\ldots$

4) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{ab}{bb}} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b^2}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}.$

5) $\sqrt{\frac{2x}{3y}} = \sqrt{\frac{2x \cdot 3y}{3y \cdot 3y}} = \frac{\sqrt{6xy}}{3y}.$

IV. Enthält die Irrationalzahl Ganze und Fraktionen, so kann man entweder Alles in einen uneigentlichen Bruch verwandeln, oder die gemeine Fraktion in Dezimalen ausdrücken. Die Operation geht dann im ersten Falle nach Nro. III., im zweiten nach Nro. II.

Beispiele.

1) $\sqrt{7\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{23}{3}} = \sqrt{\frac{23.3}{3.3}} = \frac{\sqrt{69}}{3} = \frac{8,3066239}{3} = 2,7688746.$

2) $\sqrt{9\frac{4}{5}} = \sqrt{\frac{49}{5}} = \sqrt{\frac{49.5}{5.5}} = \frac{\sqrt{245}}{5} = \frac{15,6523759}{5} =$
3,1304951.

* Oder auch

1) $\sqrt{7\frac{2}{3}} = \sqrt{7,6666\ldots} = 2,7688746.$

2) $\sqrt{9\frac{4}{5}} = \sqrt{9,8000\ldots} = 3,1304951.$

Allgemein $\sqrt{a+\frac{x}{y}} = \sqrt{\frac{ay+x}{y}} = \frac{\sqrt{(ay+x).y}}{\sqrt{y^2}} = \sqrt{\frac{ay^2+xy}{y}}.$

Anmerkung 1. Ist der Nenner bloßer Fraktionen, oder gemischter Zahlen schon rational, so bedarf es keiner weitern Operation oder Vorbereitung.

Also $\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ u. s. w.

$\sqrt{4\frac{5}{9}} = \sqrt{\frac{41}{9}} = \frac{\sqrt{41}}{3}$ u. s. w.

Anmerkung 2. Wenn man aus den Fraktionen $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{81}$ und ähnlichen die Quadratwurzel zieht, so erhält man

$\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}.$ $\sqrt{\frac{1}{81}} = \frac{1}{9}.$

Verwandelt man nun diese Quadrate in unendliche Dezimalbrüche, so ergibt sich die verlangte Wurzel ebenfalls in einem unendlichen Dezimalbruche. Z. B.

$\sqrt{\frac{1}{9}} = \sqrt{0,11111111..} = 0,333 = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$

$\sqrt{\frac{1}{81}} = \sqrt{0,012345679012..} = 0,111111 = \frac{1}{9}.$

Ganz anders verhält es sich mit unendlichen Dezimalbrüchen, welche aus irrationalen gemeinen entstanden sind; z. B.

$\sqrt{\frac{1}{7}} = \sqrt{0,142857142857..} = 0,37796445..,$

wobei man in der Wurzel keine Spur eines nach bestimmten Gesetzen fortlaufenden Dezimalbruches bemerkt.

§. 113.

Hat man komplexe Buchstabengrößen zum Quadrat zu erheben, oder aus solchen die Quadratwurzel zu ziehen, so verfährt man gleichfalls nach den in §. 105 entwickelten Formeln.

A. Bei Erhebung einer mehrtheiligen Buchstabengröße zum Quadrate substituirt man nur die gegebenen Größen in die Formeln, und reduzirt sie, so weit möglich.

Z. B. Man quadrire $(3xy^2-2x^2y+3x^my^{-2})$.

Auflösung.

Das a der Formel ist $= 3xy^2$
b — — — $= -2x^2y$
c — — — $= 3x^my^{-2}$

folglich $a^2 = (3xy^2)^2 = 9x^2y^4$
$2ab = 2.3xy^2.-2x^2y = -12x^3y^3$
$b^2 = (-2x^2y)^2 = +4x^4y^2$
$2(a+b)c = 2(3xy^2-2x^2y).3x^my^{-2} = 18x^{m+1}-12x^{m+2}y^{-1}$
$c^2 = (3x^my^{-2})^2 = 9x^{2m}y^{-4}$

$(3xy^2-2x^2y+3x^my^{-2})^2 = 9x^2y^4-12x^3y^3+4x^4y^2+18x^{m+1}$
$-12x^{m+2}y^{-1}+9x^{2m}y^{-4}$.

B. Um die Wurzel auszuziehen, muß man die gegebenen Größen zuerst nach der abnehmenden Potenzenreihe eines Buchstabens ordnen, wenn sie nicht in der Art geordnet gegeben sind, daß das Quadrat des ersten Theils an der ersten Stelle stehe ꝛc. Dann bestimmt man die Wurzel des ersten Gliedes, und zieht deren Quadrat vom ersten Gliede ab. In das herabgesetzte zweite Glied wird mit dem doppelten ersten Theile der Wurzel dividirt. Der dadurch erhaltene Quotient wird zum ersten Gliede der Wurzel und zum Divisor gesetzt; endlich mit dem zweiten Gliede der Wurzel der so vermehrte Divisor multiplizirt, und dieses Produkt vom Dividend subtrahirt. Das übrige Verfahren ist dem bei Ausziehung der Quadratwurzel aus Ziffergrößen analogisch.

Beispiele.

I. $\sqrt{16m^2-56mn+49n^2}$.

II. $\sqrt{9x^2+24xy+16y^2-30xz-40yz+15z^2}$

III. $\sqrt{\left(-\frac{(a+b)}{c}x^{4m-1}+\left(\frac{a+b}{2c}\right)^2x^{4m-2}+x^{4m}\right)}$

Auflösung.

I. $\sqrt{(16m^2-56mn+49n^2)}$ $\left(\begin{matrix}a+b\\4m-7n\end{matrix}\right.$

$a^2 = 16m^2$

$-$

$-56mn+49n^2$

$2a+b = (8m-7n)$

$2ab+b^2 = -56mn+49n^2$

$+\quad -$

0.

$\left(3x+4y-5z\right.$

II. $\sqrt{(9x^2+24xy+16y^2-30xz-40yz+25z^2)}$

$a^2 = 9x^2$

$-$

$24xy+16y^2$

$2a+b = (6x+4y)$

$2ab+b^2 = 24xy+16y^2$

$-\quad -$

$-30xz-40yz+25z^2$

$2(a+b)+c = (6x+8y-5z)$

$2(a+b)c+c^2 = -30xz-40yz+25z^2$

$+\quad +\quad -$

0.

III. Nach den Potenzen von x geordnet:

$$\sqrt{\left(x^{4m}-\left(\frac{a+b}{c}\right)x^{4m-1}+\left(\frac{a+b}{2c}\right)^2x^{4m-2}\right.}\ \Big|\ \left.x^{2m}-\left(\frac{a+b}{2c}\right)x^{2m-1}\right.$$

$$\underline{-x^{4m}}$$

$$-\left(\frac{a+b}{c}\right)x^{4m-1}$$

$$\left(2x^{2m}-\left(\frac{a+b}{2c}\right)x^{2m-1}\right)$$

$$-\left(\frac{a+b}{c}\right)x^{4m-1}+\left(\frac{a+b}{2c}\right)^2x^{4m-2}$$

$$+\qquad -$$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\phi.$$

IV. Für die Ausziehung der Quadratwurzel aus irrationalen komplexen Größen möge folgendes Beispiel als Form dienen.

$$\sqrt{x^2 - y} \quad \left\{ x - \frac{y}{2x} - \frac{y^2}{8x^3} - \frac{y^3}{16x^5} - \frac{5y^4}{128x^7} - \ldots \right.$$

$$\begin{array}{l}
-x^2 \\
\hline
-y \\
\left(2x - \frac{y}{2x}\right) \\
-y + \frac{y^2}{4x^2} \\
+ \quad - \frac{y^2}{4x^2} \\
\hline
-\frac{y^2}{4x^2} \\
\left(2x - \frac{x}{y} - \frac{y^2}{8x^3}\right) \\
-\frac{y^2}{4x^2} + \frac{y^3}{8x^4} + \frac{y^4}{64x^6} \\
\hline
-\frac{y^3}{8x^4} - \frac{y^4}{64x^6} \\
\left(2x - \frac{y}{x} - \frac{y^2}{4x^3} - \frac{y^3}{16x^5}\right) \\
-\frac{y^3}{8x^4} + \frac{y^4}{16x^6} + \frac{y^5}{64x^8} + \frac{y^6}{256x^{10}} \\
\hline
-\frac{5y^4}{64x^6} - \frac{y^5}{64x^8} - \frac{y^6}{256x^{10}}.
\end{array}$$

Zweiter Artikel.

Vom Kubus.

§. 114.

Wenn man eine Zahl mit sich selbst, und dieses Produkt, d. i. ihr Quadrat, nochmal mit der nämlichen Zahl multiplizirt, so heißt das Produkt ein Kubus, oder eine Kubikzahl. Eine Kubikzahl ist also ein Produkt aus drei gleichen Faktoren. Der einzelne Faktor ist die Kubikwurzel.

Z. B. $aaa = a^3$ ist die Kubikzahl von der Kubikwurzel a.

Die Kubusse der neun einfachen Zahlen und der Zahl 10 stellt folgendes Täfelchen dar:

Wurzel.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Kubus.	1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	512.	729.	1000.

Zusatz 1. Den Kubus von Fraktionen erhält man, wenn man Zähler und Nenner eigens kubirt. Gemischte Zahlen verwandelt man zuerst in einen uneigentlichen Bruch.

$$\text{Also } \left(\tfrac{3}{4}\right)^3 = \tfrac{3.3.3}{4.4.4} = \tfrac{27}{64}.$$

$$\left(2\tfrac{1}{2}\right)^3 = \tfrac{5}{2}.\tfrac{5}{2}.\tfrac{5}{2} = \tfrac{125}{8} = 15\tfrac{5}{8}.$$

$$\text{Allgemein } \left(\tfrac{a}{b}\right)^3 = \tfrac{a.a.a.}{b.b.b.} = \tfrac{a^3}{b^3}.$$

Zusatz 2. Erhebt man Dezimalen zum Kubus, so enthält dieser eben so viele Klassen von drei und drei Dezimalstellen, als in der Wurzel einfache Dezimalstellen waren. Z. B.

$$(0{,}4^3) = 0{,}064.$$

$$(0{,}04)^3 = 0{,}000064.$$

Zusatz 3. Jede Zahl kann zwar eine Kubikwurzel seyn; nicht aber jede Zahl ist ein reiner Kubus, wie schon aus dem Täfelchen der Kubikzahlen von 1—1000 zu sehen ist. Aus einer Zahl, welche kein Produkt aus drei gleichen Faktoren ist, läßt sich die Kubikwurzel nicht genau, sondern nur durch Approximation finden; man heißt dergleichen Zahlen irrationale Kubikzahlen, und drückt sie mit dem Wurzelzeichen $\sqrt[3]{}$ aus. Z. B.

$$\sqrt[3]{12},\ \sqrt[3]{15},\ \sqrt[3]{-7};$$

allgemein: $\sqrt[3]{a}$.

§. 115.

Um die Kubikwurzel aus einem reinen Kubus zu ziehen, die nicht über drei Ziffern hat, bedarf es nichts weiter, als die Kubusse der neun Einheiten zu wissen. Z. B.

$$\sqrt[3]{27} = 3. \quad \sqrt[3]{-64} = -4.$$

$$\sqrt[3]{-729} = -9.$$

Der Mechanismus bei Ausziehung der Kubikwurzel aus mehrzifferigen Kubussen beruht auf folgenden Sätzen.

I. Der Kubus einer Wurzel A von n Zifferstellen kann nicht mehr als 3n, und nicht weniger als 3n—2 Zifferstellen enthalten.

Beweis. 1) $A < 10^n$, mithin $A^3 < 10^{3n}$. Da nun 10^{3n} die kleinste Zahl mit $3n+1$ Ziffern ist, (es wird mit 3n Nullen und 1 geschrieben); so kann A^3 nicht mehr als 3n Ziffern enthalten.

2) $A > 10^{n-1}$, also $A^3 > 10^{3n-3}$. Es ist aber 10^{3n-3} die kleinste Zahl mit $(3n-3)+1 = 3n-2$ Ziffern, mithin kann auch A^3 nicht weniger als $3n-2$ Ziffern enthalten. Vergl. § 106. Theilt man daher einen Kubus in Klassen nach je drei Ziffern von der Rechten zur Linken ab, so erhält man eben so viele Klassen, als die Wurzel Ziffern hat, wobei auf die erste Klasse 3, 2 oder auch nur 1 Ziffer kommen kann, was sich nach dem Kubus der ersten Ziffer bestimmt. So ist z. B. $19^3 = 6|859$; $321^3 = 33|076|161$; $999^3 = 997|002|999$.

II. Wenn man eine zweitheilige Wurzel, z. B. $a+b$, zum Kubus erhebt, so enthält dieser:

1°) den Kubus des ersten Theiles, a^3;

2°) das dreifache Quadrat des ersten Theiles, multiplizirt durch den zweiten, $3a^2b$;

3°) das dreifache Quadrat des zweiten Theiles, multiplizirt durch den ersten Theil, $3ab^2$;

4°) den Kubus des zweiten Theiles, b^3.

Beweis.

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline a^2 + ab \\ \quad + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2. \\ a + b \\ \hline a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ \quad + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3. \end{array}$$

Hat man die dreitheilige Größe $a+b+c$ zum Kubus zu erheben, so setze man $a+b=p$; dann ist

$$(a+b+c)^3 = (p+c)^3 = p^3 + 3p^2c + 3pc^2 + c^3$$
$$= (a+b)^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$+ 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3.$$

Der Kubus einer dreitheiligen Größe enthält daher außer den Theilen vom Kubus einer zweitheiligen Größe noch das dreifache Produkt vom Quadrate der ersten Theile in das neu hinzugekommene Glied, das dreifache Produkt des Quadrats von diesem in die ersten Theile und den Kubus des letzten Gliedes. Für jedes noch weiter hinzukommende Glied wird der Kubus um ähnliche drei Glieder vermehrt.

III. Soll nach diesen Formeln eine mehrzifferige Zahl zum Kubus erhoben werden, so theilt man sie nach der Dekadik in Summanden ab, und bestimmt dann die einzelnen Glieder nach jenen Formeln. Dabei kann man eben so, wie bei dem Erheben einer Zahl zum Quadrate, die am Ende anzuhängenden Nullen hinweglassen, wenn man jedes folgende Glied um eine Zifferstelle weiter zur Rechten rückt. Z. B.

$$(37)^3 = (30+7)^3$$
$$a = 30$$
$$b = 7$$

$a^3 =$	27	
$3a^2b = 3.3^2.7 =$	18	9
$3ab^2 = 3.3.7^2 =$	4	41
$b^3 = 7^3 =$		343
$37^3 =$	50	653

$$(648)^3 = (600+40+8)^3$$
$$a = 600,\ b = 40,\ c = 8$$

$a^3. =$	216		
$3a^2b = 3.6^2.4 =$	43	2	
$3ab^2 = 3.6.4^2 =$	2	88	
$b^3 = 4^3 =$		64	
$3(a+b)^2c = 3.64^2.8 =$	9	830	4
$3(a+b)c^2 = 3.64.8^2 =$		122	88
$c^3 = 8^3 =$			512
$648^3 =$	272	097	792

Aus diesen Beispielen sieht man, daß die letzte Ziffer von a^3 bis zur letzten Stelle der ersten Klasse, von $3a^2b$ bis zur ersten, von $3ab^2$ bis zur zweiten, von b^3 bis zur letzten Stelle der zweiten Klasse reiche; daß die letzte Ziffer von $3(a+b)^2c$ in der ersten, von $3(a+b)c^2$ in der zweiten, von c^3 in der letzten Stelle der dritten Klasse enthalten sey. u. s. w.

* Allgemeiner läßt sich der Beweis, wie in §. 107, mit der nämlichen Bedeutung der Zeichen, in der Art führen:

$$(a+b)^3 = (m_1 . 10 + m_2)^3:$$

$a^3 = m_1^3 . 10^3$, es folgen noch drei Ziffern nach,

$3a^2b = 3m_1^2 . m_2 . 10^2$, — — — zwei — —

$3ab^2 = 3m_1 . m_2^2 . 10$ es folgt eine Ziffer nach,

$b^3 = m_2^3 . 10^0$ — — keine Ziffer weiter.

Eben so: $(a+b+c)^3 = (m_1 . 10^2 + m_2 . 10 + m_3)^3$:

$a^3 = m_1^3 . 10^6$, es folgen nach 6 Ziffern = 2 Klassen,

$3a^2b = 3m_1^2 . m_2 . 10^5$ — — — 5 — = 2 Klassen weniger 1 Ziffer,

$3ab^2 = 3m_1 . m_2^2 . 10^4$ — — — 4 — — — — weniger 2 Ziffern,

$b^3 = m_2^3 . 10^3$ — — — 3 — = 1 Klasse.

$3(a+b)^2c = 3(m_1 . 10^2 + m_2 . 10)^2 . m_3 = 3(m_1 . 10 + m_2)^2 m_3 . 10^2$, es folgen 2 Ziffern,

$3(a+b)c^2 = 3(m_1 . 10 + m_2) . m_3^2 . 10$, es folgt noch eine Ziffer;

$c^3 = m_3^3$, es folgt keine Ziffer weiter.

Für jede mehrzifferige Zahl ist der Beweis der nämliche.

** Wie man jede mehrzifferige Zahl nach den Tafeln der Kubikzahlen, und obigen Formeln auf eine kurze Art zum Kubus erheben könne, siehe unten §. 122.

§. 116.

Aufgabe. Aus einer gegebenen vollkommenen Kubikzahl, die nicht über sechs Zifferstellen hat, die Wurzel zu finden.

Auflösung. I. Man theilt die gegebene Zahl von der Rechten zur Linken in Klassen von drei und drei Ziffern, bis auf die höchste oder letzte, welche auch aus 2, 1 Ziffer bestehen kann.

II. Ziehe von der ersten Klasse den größten Kubus einer der neun Urzahlen ab, der sich subtrahiren läßt, und schreibe die Wurzel davon an die Stelle des Quotienten.

III. Zu dem allenfallsigen Reste der ersten Klasse setze man die folgende Klasse herab, nehme das dreifache Quadrat des ersten Theils der Wurzel als Divisor, und schreibe dessen niedrigste Ziffer unter die höchsten der neuen Klasse, und dividire damit in die obenstehenden Zahlen. Der Quotient ist der zweite Theil der Wurzel.

IV. Nun multiplizire man mit diesem Quotienten den Divisor (erstes Summand); nehme das Quadrat des zweiten Theils, multiplizire es mit dem dreifachen ersten, und setze die niedrigste Ziffer dieses Produktes unter den Zehner der neuen Klasse (zweites Summand). Endlich kubire man den zweiten Theil der Wurzel, setze die niedrigste Ziffer dieses Kubus unter die Einserstelle der neuen Klasse (drittes Summand), addire diese drei Summanden, und ziehe die Summe von der noch übrigen ganzen Kubikzahl ab.

* Die angegebenen Regeln der Untereinanderordnung der einzelnen Glieder ꝛc. können einfach aus den in §. 115. III. aufgestellten Sätzen abgeleitet werden.

Beispiel. Man ziehe die $\sqrt[3]{}$ aus 571787, nach der Formel.

Operation. $(a = 80,\ b = 3 \mid a + b = 83.$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 571|787$$
$$-\ a^3 \qquad\qquad\qquad\qquad -\ 512$$
$$3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 59|787$$
$$:\ 3a^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . = 19|2$$
$$\times b \quad 3a^2b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . = 57|6 \quad \times 3$$
$$+ 3ab^2 \quad . \quad . = 2|16$$
$$+ b^3 = 27$$
$$3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 59|787$$
$$-\qquad -\qquad -\qquad -$$
$$0. \qquad\qquad 0.$$

§. 117.

Aufgabe. Aus was immer für einer Zahl, die ein reiner Kubus ist, und aus mehr als sechs Ziffern besteht, die Kubikwurzel zu ziehen.

Auflösung. I. Man theile die gegebene Kubikzahl in Klassen von drei und drei Ziffern, wie §. praec.

II. Um die beiden ersten Theile der Wurzel zu finden, bleibt die Operation ganz die nämliche, wie §. cit.

III. Zum Reste, der sich nach Abzug der dreitheiligen Summe ergibt, setze man die folgende Klasse herab, und betrachte die gefundenen zwei Ziffern als den ersten Theil der Wurzel. Suche davon das dreifache Quadrat, setze die niedrigste Ziffer desselben unter den höchsten der neuen Klasse, und dividire so in die darüber stehende Zahl. Der Quotient ist der dritte Theil der Wurzel.

IV. Nun multiplizire man mit dem neuen Theil der Wurzel den Divisor, (erstes Summand); suche das dreifache Quadrat des neuen Theils der Wurzel, und multiplizire es durch den ganzen vorhergehenden Theil. Setze die niedrigste Ziffer dieses Produktes unter den Zehner der neuen Klasse, (zweites Summand). Suche den Kubus des neuen Theils der Wurzel, und setze die niedrigste Ziffer desselben unter die Einserstelle der neuen Klasse (drittes Summand). Addire hierauf diese drei Theile, und ziehe die Summe von der noch übrigen ganzen Kubikzahl ab.

V. Sind noch mehrere Klassen vorhanden, so betrachte man die bisher gefundenen Theile der Wurzel immer als einen, und beginnt die Operation wieder von Nro. III. an, bis die Kubikzahl erschöpft ist. —

VI. So oft man auf die Nro. III. vorgeschriebene Art mit dem Divisor in das Dividend nicht dividiren kann, indem letzteres weniger beträgt, als der erste, so muß in der Wurzel als Quotus eine Nulle angeschrieben, eine neue Klasse herabgesetzt, und ein neuer Divisor gesucht werden.

VII. Sollte man die bei Nro. IV. sich ergebende dreifache Summe vom Dividend nicht abziehen können, so wäre dieses ein Zeichen, daß man den Quotus zu hoch angesetzt habe. — Man müßte ihn dann so lange vermindern, bis der Abzug angeht.

VIII. Für jede Klasse von drei Nullen im Kubus erhält die Wurzel eine einfache Nulle ... Ueberhaupt bekommt die Wurzel so viele Zifferstellen, als die Kubikzahl Klassen hat.

I. Aufgabe. $\sqrt[5]{}$ 496981290961.

Auflösung. $\sqrt[5]{}$ 496|981|290|961 | 7921

$a^3 = 343$

153981

$3a^2 = 3.7^2 = (147)$
$3a^2b = 147.9 = 1323$
$3ab^2 = 3.7.9^2 = 1701$
$b^3 = 9^3 = 729$

150039

3942290

$3(a+b)^2 = 3.79^2 = (18723)$
$3(a+b)^2.c = 18723.2 = 37446$
$3(a+b)c^2 = 3.79.2^2 = 948$
$c^3 = 2^3 = 8$

3754088

188202961

$3(a+b+c)^2 = 3(a+b+c)^2d = 1881792$
$3(a+b+c)d^2 + d^3 = 23761$

188202961

0

II. Aufgabe. $\sqrt[3]{}$ 128.100'283.921.

Auflösung. $\sqrt[3]{}$ 128|100|283|921 (5041.

$a^3 = 125$

3100

$3a^2 = (75)$

3100283.

$3a^2 = (7500)$
$3a^2b = 30000$
$3ab^2 = 2400$
$b^3 = 64$

$3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 3024064$

76219921.

$3(a+b)^2 = 3(a+b)^2c = .. 762048$
$3(a+b)c^2 = ... 1512$
$c^3 = ... 1$

S = 76219921

0.

Anmerkung. Der Rest R muß, wenn n die bereits gefundenen Ziffern der Wurzel bezeichnet, kleiner seyn, als $3n^2 + 3n + 1$; weil, wenn $\sqrt[3]{A} = n$ sammt dem Reste R und $R = 3n^2 + 3n + 1$ wäre, auch

$$A = n^3 + R$$
$$= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3$$ seyn müßte.

Es wäre also nicht n, sondern $n+1$ die Wurzel. Noch weniger kann $R > 3n^2 + 3n + 1$ seyn.

§. 118.

Hat man die Kubikwurzel aus Fraktionen zu ziehen, welche nach der Voraussetzung reine Kubusse sind, so muß man die Wurzel aus Zähler und Nenner besonders ziehen. Gemischte Zahlen verwandelt man zuvor in einen uneigentlichen Bruch.

Beispiele. I. $\sqrt[3]{\frac{4096}{15.625}} = \frac{\sqrt[3]{4096}}{\sqrt[3]{15.625}} = \frac{16}{25}$.

II. $\sqrt[3]{\frac{729}{1.000}} = \frac{9}{10}$.

III. $\sqrt[3]{169 + \frac{1.955}{2.197}} = \sqrt[3]{\frac{373.248}{2.197}} = \frac{72}{13} = 5\frac{7}{13}$.

§. 119.

Ist der Kubus, woraus die Wurzel zu ziehen, eine Dezimalzahl, mit Ganzen oder ohne diese, so setze man in der Wurzel so viele einzelne Ganze und Dezimalen, als in der Kubikzahl Klassen von beiden stehen, und verfahre übrigens wie bei Ausziehung der Wurzel aus ganzen Zahlen.

Beispiele. I. $\sqrt[3]{118{,}370771} = 4{,}91$.

* Die Wurzel aus dem Nenner ist $= \sqrt[3]{1000.000} = 100$.

II. $\sqrt[3]{0{,}000074088} = 0{,}042$.

* Die Abwesenheit der Ganzen im Kubus wurde in der Wurzel durch 0, ... die erste Klasse der Nullen durch eine einzige Nulle nach dem Komma angezeigt.

Die übrige Operation zur Uebung!

§. 120.

Hat man die Kubikwurzel aus Irrationalzahlen zu ziehen, so verfährt man analogisch, wie bei Ausziehung der Quadratwurzel aus Irrationalzahlen.

I. Man hängt der Irrationalzahl Klassen von drei und drei Nullen an, und verfährt übrigens wie bei reinen Kubussen.— Je mehr man in der Wurzel Dezimalstellen sucht, desto näher kommt man der wahren Wurzel.

II. Hat die Irrationalzahl bereits Dezimalen, so ergänzt man diese vor allem zu 3, 6, 9 Stellen u. s. w. Um dieß weniger zu übersehen, theilt man die Dezimalen von der Linken zur Rechten in Klassen ab.

III. Brüche, worin Zähler und Nenner irrational sind, verwandelt man am bequemsten in einen Dezimalbruch. Ist bloß der Zähler irrational, so kann man die Wurzel des Zählers durch jene des Nenners dividiren. Auf diese letzte Form läßt sich aber leicht jeder Bruch reduziren, wenn man nur mit dem Quadrate des Nenners Zähler und Nenner multiplizirt; denn

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \sqrt[3]{\frac{a \times b^2}{b \times b^2}} = \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b}.$$

Manchmal verschwindet die Irrationalität des Bruches nach der Verkleinerung; z. B.

$$\sqrt[3]{\frac{448}{875}} = \sqrt[3]{\frac{448:7}{875:7}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{4}{5}.$$

Beispiele. I. $\sqrt[3]{586}$. II. $\sqrt[3]{18{,}7}$. III. $\sqrt[3]{28\frac{3}{5}}$. IV. $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$.

Auflösung. $\sqrt[3]{586{,}000000\ldots\ldots}$ (8,368209

512

74000

192

576

216

27

59787

14213000

20667

124002

8964

216

— 12490056 ... u. s. w. bis zur 6. Dezimalstelle, worauf als Rest bleibt:

0,000082184575046671.

Um die Probe zu machen, muß ich nun zum Kubus der Wurzel diesen Rest addiren:

$$(8{,}368209)^3 = 585{,}999917815424953329$$
$$+0{,}000082184575046671$$
$$= 586{,}000\ldots\ldots\ldots$$

II. $\sqrt[3]{18{,}7} = \sqrt[3]{18{,}700|000|} \ldots\ldots = 2{,}6542.$

III. $\sqrt[3]{28\frac{3}{5}} = \sqrt[3]{28{,}600\ldots\ldots\ldots} = 3{,}0581\ldots$

oder $\sqrt[3]{28\frac{3}{5}} = \sqrt[3]{\frac{143\times25}{5\times25}} = \frac{\sqrt[3]{3.575}}{5} = \frac{15.2909}{5} = 3{,}05819.$

IV. $\sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{0{,}75} = 0{,}9085603,$

oder $\sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{\frac{3\,16}{4.16}} = \frac{\sqrt[3]{48}}{4} = \frac{3.6342412}{4} = 0{,}9085603.$

Anmerkung. Wenn man einen gemeinen Bruch, der ein reiner Kubus ist, in einen unendlichen Dezimalbruch verwandelt, und daraus die Kubikwurzel zieht, so erscheint diese ebenfalls in einem unendlichen Dezimalbruche.

Z. B. $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \sqrt[3]{0{,}296296} = 0{,}666\ldots = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$

Eben so: $\sqrt[3]{\frac{1}{2\,1\,6}} = \sqrt[3]{0{,}004296296\ldots} = 0{,}1666 = \frac{1}{6}.$

§. 121.

A. Hat man komplexe Buchstabengrößen zum Kubus zu erheben, so substituirt man nur in die §. 115 aufgestellten Formeln, und entwickelt die Glieder einzeln.

Z. B. $(2d^3g - 3d^2g^2 + \frac{1}{6}dg^3)^3$.

Auflösung. Hier ist das a der Formel $= 2d^3g$, $b = -3d^2g^2$, $c = \frac{1}{6}dg^3$.

$$a^3 = (2d^3g)^3 = 8d^9g^3$$
$$3a^2b = 3(2d^3g)^2.-3d^2g^2 = -36d^8g^4$$
$$3ab^2 = 3.2d^3g.(-3d^2g^2)^2 = +54d^7g^5$$
$$b^3 = (-3d^2g^2)^3 = -27d^6g^6$$
$$3(a+b)^2c = 3(2d^3g-3d^2g^2)^2.\tfrac{1}{6}dg^3 = 2d^7g^5 - 6d^6g^6 + \tfrac{9}{2}d^5g^7$$
$$3(a+b)c^2 = 3(2d^3g-3d^2g^2)(\tfrac{1}{6}dg^3)^2 = \tfrac{1}{6}d^5g^7 - \tfrac{1}{4}d^4g^8$$
$$c^3 = (\tfrac{1}{6}dg^3)^3 = +\tfrac{1}{216}d^3g^9$$

$$(2d^3g - 3d^2g^2 + \tfrac{1}{6}dg^3)^3 = 8d^9g^3 - 36d^8g^4 + 56d^7g^5 - 33d^6g^6 + \tfrac{14}{3}d^5g^7 - \tfrac{1}{4}d^4g^8 + \tfrac{1}{216}d^3g^9.$$

B. Bei dem Ausziehen der Kubikwurzel aus komplexen Buchstabengrößen ordnet man die Glieder nach der abnehmenden

Potenzen-Reihe eines Buchstaben, und verfährt dann analogisch, wie bei Ausziehung der Kubikwurzel aus Zahlen. Vergl. auch §. 113. B.

Beispiele: I. $\sqrt[3]{8a^3-60a^2b+150ab^2-125b^3}$.

II. $\sqrt[3]{(8m^3-60m^2n+150mn^2-125n^3+84m^2p-420mnp+525n^2p+294mp^2-735np^2+343p^3)}$.

III. $\sqrt[3]{\left(\frac{27}{64}x^3-1\frac{1}{8}x^2y+xy^2-\frac{8y^3}{27}\right)}$.

Auflösung.

I. $\sqrt[3]{8a^3-60a^2b+150ab^2-125b^3}$ $(2a-5b$

$8a^3$

$-60a^2b+150ab^2-125b^3$

$(12a^2)$

$-60a^2b+150ab^2-125b^3$

$+\quad -\quad +$

$0.$ $(2m-5n+7p)$

II. $\sqrt[3]{8m^3-60m^2n+150mn^2-125n^3+84m^2p-420mnp+525n^2p+294mp^2-735np^2+343p^3}$

$a^3 = 8m^3$

$-60m^2n+150mn^2-125n^3$

$3a^2 = (12m^2)$

$3a^2b+3ab^2+b^3 = -60m^2n+150mn^2-125n^3$

$+\quad -\quad +$

$84m^2p-420mnp+525n^2p+294mp^2-735np^2+343p^3$

$3(a+b)^2 = (12m^2 - 60mn + 75n^2)$

$*S = 84m^2p-420mnp+525n^2p+294mp^2-735np^2+343p^3$

$-\quad +\quad -\quad -\quad +\quad -$

$0.$

* S bezeichnet hier $3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3$

III. $\sqrt[3]{\frac{27}{64}x^2-1\frac{1}{8}x^2y+xy^2-\frac{8y^3}{27}}$. $\Big\}\frac{3}{4}x-\frac{2}{3}y.$

$-\frac{27}{64}x^3$

$-\frac{9}{8}x^2y+xy^2-\frac{8y^3}{27}$

$\left(*\frac{27}{16}x^2\right)$

$-\frac{9}{8}x^2y+xy^2-\frac{8y^3}{27}$

$+\quad -** \quad +$

$0.$

$*\frac{9}{8}\times\frac{16}{27}=\frac{2}{3}$.

$**\frac{4}{9}\times\frac{3}{4}\times 3=1$.

IV. $\sqrt[3]{8a^{3m}b^{-3}-24a^{3m-1}b^{-2}+36a^{3m-2}b^{-1}} \mid 2a^{m}b^{-1}-2a^{m-1}+a^{m-2}b\ldots$

$8a^{3m}b^{-3}$ | b

$-24a^{3m-1}b^{-2}+36a^{3m-2}b^{-1}$

$(12a^{2m}b^{-2})$

$-12a^{3m-1}b^{-2}+24a^{3m-2}b^{-1}-8a^{3m-3}$

$+\quad -\quad +$

$12a^{3m-2}b^{-1}+8a^{3m-3}$

$(12a^{2m}b^{-2}-24a^{2m-1}b^{-1}+12a^{2m-2})$

$12a^{3m-2}b^{-1}-24a^{3m-3}+12a^{3m-4}b$

$+6a^{3m-4}b-6a^{3m-5}b^{2}$

$+a^{3m-6}b^{3}$

$12a^{3m-2}b^{-1}-24a^{3m-3}+18a^{3m-4}b-6a^{3m-5}b^{2}+a^{3m-6}b^{3}$

$-\quad +\quad +\quad +\quad -$

Rest: $32a^{3m-3}-18a^{3m-4}b+6a^{3m-5}b^{2}-a^{3m-6}b^{3}$.

§. 122.

Am Ende dieses Lehrbuches sind die Tafeln der Quadrat- und Kubik-Zahlen und Wurzeln von 1 bis 1000 angefügt, über deren Gebrauch hier Einiges gesagt werden soll.

I. Ueber den Gebrauch der ersten Tafeln (Quadrat- und Kubik-Zahlen).

1. Diese Tafeln dienen die durch Rechnung, sey es durch bloße Multiplikation, oder nach der Formel gefundenen Quadrate und Kubusse aller natürlichen ganzen Zahlen von 1 — 1000 zu prüfen.

Z. B. a) Man quadrire und b) kubire nach der Formel 905.

a) $(a+b+c)^2=(905)^2=9..+0+5^2$ *

$a^2 = 9^2 = 81$

$2ab = 2.9.0 = 0$

$b^2 = 0^2 = 0$

$2(a+b)c = 2.90.5 = 900$

$c^2 = 5^2 = 25$

$905^2 = 819025.$

* Ohne Lokalwerth betrachtet. Vgl. §. 107.

Kürzer: 8100
900
25
819025

b) $(a+b+c)^3 = (905)^3 = (9..+0+5)^3$

$a^3 = 9^3 = 729$

$3a^2b = 3.9^2.0 = 0$

$3ab^2 = 3.9.0^2 = 0$

$b^3 = 0^3 = 0$

$3(a+b)^2c = 3.90^2.5 = 121500$

$3(a+b)c^2 = 3.90.5^2 = 6750$

$c^3 = 5^3 = 125$

$905^3 = 741217625.$ Vgl. §. 115. III.

Kürzer: 729000
121.500
6750
125
741217625

Beide Resultate finden sich in den Tafeln.

2. Besonders erleichtern diese Tafeln das Quadriren oder Kubiren solcher Zahlen, welche mehr als drei Zifferstellen enthalten, wenn man die ersten drei Zifferstellen, so weit sie nämlich in den Tafeln stehen, als ersten Theil (a) der Wurzel (a+b) ansieht, und nach der zweitheiligen Formel behandelt.

Beispiele.

a) $(8836)^3 = (883.+6)^3 = (a+b)^3$

$a^3 = 883^3$	=	688465387
$3a^2b = 3.779689.6$	=	14034402
$3ab^2 = 3.883.36$	=	95364
$b^3 = 6^3$	=	216
$(8836)^3$	=	689869781056.

b) $(970.299)^2 = (970.000 + 299)^2 = (a+b)^2$.

a^2	=	940.900′000.000
$2ab$	=	... 560′060.000
b^2	=	..... 89.401
$(a+b)^2$	=	941.480′149.401.

3) Nicht minder erleichtert wird das Ausziehen der Quadrat- oder Kubikwurzel von vier und mehr Zifferstellen, wenn man die Tafeln zu Hülfe nimmt, und von den höchsten drei Klassen der Quadrat- oder Kubikzahl das größte Quadrat oder den größten Kubus aus den Tafeln, welcher sich abziehen läßt, abzieht, und diese drei Zifferstellen als den ersten Theil der Wurzel betrachtet.

Um aber die richtige Zahl aus den Tafeln zu nehmen, hat man wohl darauf zu achten, wie viel Ziffern bei einer Abtheilung nach Klassen von je zwei oder drei Ziffern in die erste Klasse zu stehen kommen.

Beispiele.

a) $\sqrt{}$ 17.596′287.801.

b) $\sqrt[3]{}$ 606.355′001.344.

c) $\sqrt[3]{}$ 25.419.964′033.827.

Operation.

a) $\sqrt{}$ 1|75|96|28|78|01 (132.651

1 74 24 *

1 72 28

(26 46)

1 58 76

13 52 78

2 65 25

13 26 25

26 53 01

26 53 01

0.

* Das größte Quadrat, welches sich von den drei ersten Klassen abziehen läßt, Wurzel 132. Weil in der ersten Klasse nur 1 Ziffer steht, durfte 175561, wozu 419 als Wurzel gehört hätte, nicht genommen werden.

b) $\sqrt[3]{606.355'001.344}$ (8464

605.495'736 *

... 859 265 344

** (214 714 8)

858 859 2

406 08

64

859 265 344

0.

* Der größte Kubus aus den Tafeln

** ist $(846)^2$ aus den Tafeln, multiplizirt durch 3.

c) $\sqrt[3]{25''419.964'033.827}$ (29.403.

Weiß ich einmal, daß diese Zahl ein reiner Kubus sey, so erhalte ich die ersten 4 Stellen der Wurzel auf die eben gezeigte Weise; die fünfte Stelle erkenne ich aus der Endziffer des Kubus 27, dessen Wurzel 3 ist.

4°) Da ferner $\sqrt{25.921} = 161$,

$\sqrt[3]{13'144.256} = 236$;

so ist auch $\sqrt{259{,}21} = 16{,}1$,

$\sqrt{2{,}5921} = 1{,}61$ und $\sqrt{0{,}025921} = 0{,}161$,

$\sqrt[3]{13.144{,}256} = 23{,}6$,

$\sqrt[3]{13{,}144256} = 2{,}36$,

$\sqrt[3]{0{,}013144256} = 0{,}236$.

II. Ueber den Gebrauch der zweiten Tafeln (Quadrat- und Kubikwurzeln).

1. Will man diese Tafeln auf die Ausziehung der doppelten Wurzel aus Dezimalen anwenden, welche nicht über drei Stellen haben, so muß man vor allem die Quadratzahlen zu je zwei, und die Kubikzahlen zu je drei Dezimalstellen kompliren, und dann bei der Abschneidung der Ganzen die nöthigen Regeln beobachten.

Beispiele.

a) $\sqrt{316} = 17{,}7763888$ (aus den Tafeln),

folglich auch $\sqrt{3{,}16} = 1{,}77763888$,

$\sqrt{0{,}0316} = 0{,}177763888$.

b) $\sqrt{3{,}5} = \sqrt{3{,}50} = 1{,}87082869$.

c) $\sqrt[3]{0{,}9} = \sqrt[3]{0{,}900} = 0{,}99966655$.

d) $\sqrt[8]{316} = 6{,}8112846$;

also auch $\sqrt[8]{0{,}316} = 0{,}68112846$.

2. Hat die Dezimalzahl (mit oder ohne Ganze), aus welcher man die Quadrat- oder Kubikwurzel ziehen soll, mehr als drei Zifferstellen (so daß sie weder in den ersten, noch in den zweiten Tafeln gefunden wird), so sieht man vor allem, ob sie sich nicht in zwei Faktoren zerfällen lasse, wovon der eine ein reines Quadrat oder ein reiner Kubus ist (je nachdem man die zweite oder die dritte Wurzel zu suchen hat). Man zieht dann die Wurzel aus den beiden Faktoren einzeln, und multiplizirt am Ende beide durch einander.

Beispiele.

a) $\sqrt{29{,}75} = \sqrt{25 \times 1{,}19} = 5 \times 1{,}09087121 = 5{,}45435605$.

b) $\sqrt[3]{5{,}616} = \sqrt[3]{27 \times 0{,}208} = 3\sqrt[3]{0{,}208} = 3 \times 0{,}59249922$.

oder $\sqrt[3]{5{,}616} = \sqrt[3]{8 \times 0{,}702} = 2\sqrt[3]{0{,}702} = 2 \times 0{,}88874882 = 1{,}77749764$.

Anmerkung. Die Operation bliebe die nämliche, wenn in den vorliegenden Fällen anstatt der Dezimalen lauter Ganze gegeben wären.

Z. B. $\sqrt{2975} = \sqrt{25 \times 119} = 54{,}54 \ldots\ldots$

$\sqrt[3]{5616} = \sqrt[3]{27 \times 208} = 17{,}77 \ldots\ldots$

3. Ist diese Zerfällung in zwei solche Faktoren nicht möglich, so komplirt man die Dezimalen der gegebenen unreinen Quadrat- oder Kubikzahl, so daß wenigstens 4 Klassen, also 4 Zifferstellen in der Wurzel entstehen, und verfährt damit, wie oben I. 3. §. eod. gesagt wurde, wo dann hier die Tafeln der Quadrat- und Kubikzahlen benützt werden.

Beispiele. a) $\sqrt{7{,}689} = \sqrt{7{,}68|90|00|00}$

$\sqrt{7{,}6890\|00\|00}$	(2,7729
*76729	* Größtes Quadrat, welches man
16100	aus den Tafeln abziehen kann,
(5542)	Wurzel 277.
11084	
501600	
(55429).	

b) $\sqrt[3]{982,72} = \sqrt[3]{982,720|000|000}$

$\sqrt{982,720|000|000}$ (9,942

* 982,107|784

612216000

(2964108)

5928216

11928

8

592940888

29'275.112.

* Größter Kubus aus den Tafeln.

* Leichter und schneller geht das Wurzelausziehen aus Irrationalzahlen mittelst der Logarithmen.

Dritter Artikel.

Binomischer Lehrsatz.

§. 123.

Der Ausdruck des allgemeinen Gesetzes, nach welchem man jede zwei- oder mehrtheilige Größe zu jeder Würde erheben, und aus solcher jede Wurzel ausziehen kann, heißt der binomische Lehrsatz (Theorema binomiale), oder nach seinem Erfinder Newton's Binomium.

Für ganze und positive Exponenten einer Würde läßt sich dieser Lehrsatz durch die Multiplikation binomischer Faktoren von der Form: $a+b$, $a+c$, $a+d$, ... in Verbindung mit den in der Kombinationslehre (§. 67. 5° und §. 68. I.) aufgestellten Sätzen entwickeln.

I. Multiplizirt man nämlich mehrere binomische Faktoren von der Form: $a+b$, $a+c$, $a+d$, $a+e$, ... (daß also ihre ersten Glieder gleich sind), und ordnet sie nach den Potenzen von a; so erhält man:

α) $(a+b)(a+c) = a^2+(b+c)a+bc$

β) $(a+b)(a+c)(a+d) = a^3+(b+c+d)a^2+(bc+bd+cd)a+bcd.$

γ) $(a+b)(a+c)(a+d)(a+e) = a^4+(b+c+d+e)a^3+(bc+bd+be+cd+ce+de)a^2+(bcd+bce+bde+cde)a+bcde.$

II. Bei den Reihen, welche durch die Entwickelung der Produkte der binomischen Faktoren entstehen, bemerkt man folgende wichtige Eigenschaften:

1) Jede (Produkten-) Reihe enthält ein Glied mehr, als die Anzahl der (binomischen) Faktoren beträgt: bei 2 Faktoren 3 Glieder, bei 3 Faktoren 4 Glieder, u. s. w.

2) Das den Faktoren gemeinschaftliche Glied a erscheint im ersten Gliede der Reihen in einer Würde, deren Exponent der Zahl der Faktoren entspricht, z. B. bei 4 Faktoren in der vierten Würde; dann nimmt der Exponent von a in jedem folgenden Gliede um 1 ab, bis er im letzten Gliede $= 0$ wird.

3) Die ungleichen Glieder der Faktoren, b, c, d, e...., kommen im ersten Gliede der Reihen gar nicht, in den folgenden Gliedern als Koeffizienten der Potenzen von a, und zwar im zweiten Gliede nach Unionen, im dritten Gliede nach Binionen, im vierten Gliede von β) und γ) nach Ternionen, im fünften Gliede von γ nach Quaternionen verbunden vor.

Diese drei Gesetze lassen sich auch für eine größere Zahl von Faktoren nachweisen, wenn man γ) mit $\overset{\alpha}{x}+f$, $\overset{\alpha}{x}+g\ldots$ multiplizirt; so daß man, wenn für n Elemente die Unionen mit A, die Binionen mit B, Ternionen mit C....., die Kombinationen zur $(n-1)^{ten}$ und n^{ten} Klasse mit $\overline{N}^{I}$ und N, und der n^{te} Faktor mit $a+n$ bezeichnet werden, erhält:

$$(a+b)(a+c)(a+d)\ldots\ldots(a+n) = a^n + A.a^{n-1} + B.a^{n-2} + C.a^{n-3} + \ldots\ldots \overline{N}^{I}a + N.$$

III. Die aufgestellten Gesetze gelten aber auch allgemein für m solche binomische Faktoren, es mag m was immer für eine Zahl bezeichnen.

Beweis. Nimmt man an, jene Gesetze seyen für eine bestimmte Zahl von Faktoren, etwa für n, nachgewiesen; so kann auf nachstehende Art gezeigt werden, daß daraus auch auf ihre Gültigkeit für jede größere Anzahl von Faktoren geschlossen werden könne. — Kommt nämlich zu obigen n Faktoren noch ein Faktor $= a+p$, und multiplizirt man damit jene Reihe:

$$(a+b)(a+c)(a+d)\ldots.(a+n)=a^n+A.a^{n-1}+B.a^{n-2}+C.a^{n-3}+\ldots.$$
$$\times\quad (a+p)\qquad\qquad =a+p\qquad\qquad \bar{N}^{1}a+N$$

$$(a+b)(a+c)(a+d)\ldots.\ (a+n)(a+p)=$$
$$a^{n+1}+A.a^n+B.a^{n-1}+C.a^{n-2}+\ldots.\bar{N}^{1}a^2+N.a$$
$$+p.a^n+Ap.a^{n-1}+Bp.a^{n-2}+\ldots.\ \bar{N}^{1}p.a+Np;$$

ordnet man die Glieder der Produkten-Reihe nach den Potenzen von a in der Art, daß a^n, a^{n-1}.... als gemeinschaftlicher Faktor getrennt wird; so erhält man:

$$(a+b)(a+c)(a+d)\ldots.(a+n)(a+p)=$$
$$a^{n+1}+(A+p)a^n+(B+Ap)a^{n-1}+(C+Bp)+\ldots.+$$
$$+(N+\bar{N}^{1}p)a+Np.$$

In dieser Reihe sind die Exponenten von a, vom ersten Gliede an, $n+1, n, n-1, \ldots 1, 0$, folglich nach obigem Gesetz bildet (II. 2.). Daher hat auch die Reihe $(n+1)+1=n+2$ Glieder, also ein Glied mehr, als die Anzahl der Faktoren beträgt. (II. 1.) Auch für die Koeffizienten folgt aus der letzten Reihe die oben in II. 3° ausgesprochene Gesetzmäßigkeit. Der Koeffizient vom zweiten Gliede: $(A+p)$ drückt offenbar, da A die Unionen von n Elementen bezeichnet, die Summe der Unionen von $n+1$ Elementen aus. Der Koeffizient vom dritten Gliede: $B+Ap$ enthält außer den Binionen von n Elementen noch so viel neue Binionen, als n Elemente Unionen geben, (indem das neue Element p mit jeder von diesen zu einer Binion verbunden wird), mithin die Binionen von $n+1$ Elementen. Der Koeffizient vom vierten Gliede enthält außer C, den Ternionen von n Elementen noch die Komplexionen Bp, d. i. die Verbindung der einzelnen Binionen von n Elementen mit dem neuen Elemente, also die Ternionen von $n+1$ Elementen, u. s. w. Das letzte Glied Np enthält die Komplexion von n Elementen zur n^{ten} Kombinationsklasse verbunden mit dem neuen Elemente p, also die Verbindung von $n+1$ Elementen zur $n+1^{ten}$ Klasse. Vgl. §. 68. I. 4°.

Aus der Gültigkeit der aufgestellten Gesetze für n Elemente wurde demnach auch ihre Gültigkeit für $n+1$ Elemente bewiesen. Nun sind die Gesetze für $n=4$ Faktoren durch Induktion nachgewiesen, folglich gelten sie auch für $n+1=5$ Faktoren;

aus der Gültigkeit für $n = 5$ Faktoren folgt sie auch für $n+1 = 6$, und in ähnlicher Art für jede größere Zahl von Faktoren. Daher ist allgemein für m Faktoren:

$$(a+b)(a+c)(a+d)\ldots\ldots(a+m) = a^m + Aa^{m-1} + Ba^{m-2} + Ca^{m-3} + \ldots\ldots \overline{\overline{M}}^{I} a + M.$$

wo A, B, C, ... $\overline{\overline{M}}^{I}$, M die Kombinationen von m Elementen zur ersten, zweiten, dritten, ... $m-1^{ten}$ und m^{ten} Klasse bezeichnen.

§. 124.

Setzt man die m binomischen Faktoren einander gleich, z. B. $= a+b$; so verwandelt sich ihr Produkt in die m^{te} Würde von $a+b$, und die Produkten-Reihe in den Ausdruck des allgemeinen Gesetzes, welches man den binomischen Lehrsatz heißt. Was dabei

1) die Anzahl der Glieder betrifft, so ist klar, daß diese durch das Gleichsetzen der Faktoren nicht abgeändert, also immer durch $m+1$ ausgedrückt werde. Eben so bleibt

2) die Beschaffenheit des ersten Gliedes a des Binomiums $a+b$ in den einzelnen Gliedern der Reihe unverändert, da dieselbe von der Beschaffenheit der zweiten Glieder der binomischen Faktoren nicht abhängt; daher wird a vom ersten bis zum letzten Gliede in der Form:

a^m, a^{m-1}, a^{m-2} ..... $a^{m-(n-1)}$ (im n^{ten} Gliede)..... a^0

erscheinen.

3) Die Koeffizienten der Potenzen von a: A, B, C, ... $\overline{\overline{M}}^{I}$, M werden, da b, c, d, e, ... $= b$ gesetzt werden, Summen von Potenzen von b werden, und zwar wird

α) A die Summe von so vielen b, als m Elemente Unionen geben, bezeichnen, oder $A = {}^{m}\mathfrak{A}b = mb$ (§. 68. I. 2°.);

β) B die Summe von so vielen Binionen, jede $= bb = b^2$, als m Elemente geben, oder $B = {}^{m}\mathfrak{B}b^2 = \frac{m(m-1)}{1.2} . b^2$;

γ) C die Summe aller Ternionen von m Elementen, jede Ternion = bbb = b^3; oder $C = {}^m\mathfrak{C}b^3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} . b^3$; eben so

δ) $D = {}^m\mathfrak{D}b^4 = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} . b^4$.

ε) Der Koeffizient von a^{m-n}, also vom $(n+1)^{ten}$ Gliede enthält bbb.... n = b^n so oft, als m Elemente Kombinationen zur n^{ten} Klasse geben, ist also = ${}^m\mathfrak{N}b^n$ =

$$\frac{m(m-1)(m-2).....(m-(n-1))}{1.2.3.....n} . b^n.$$

Mithin ist die allgemeine Form des binomischen Lehrsatzes:

$$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}b^3 + ...$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2).....(m-(n-1))}{1.2.3.....n}a^{m-n}b^n.$$

§. 125.

Aus der nähern Betrachtung des binomischen Lehrsatzes ergeben sich die Folgesätze:

1) Wird n = m, so wird $a^{m-n} = a^\circ = 1$: es verschwindet a im letzten Gliede, im vorletzten Gliede erhält a den Exponenten 1 ꝛc. Stellt man nun die zusammengehörigen Potenzen von a und b zusammen:

a^m, a^{m-1}, a^{m-2} ..... a^2, a^1, a°
b°, b^1, b^2 ..... b^{m-2}, b^{m-1}, b^m

so ergibt sich daraus, daß

α) die Summe der Exponenten von a und b in jedem Gliede = m; daß

β) die Potenzen-Reihen von a und b einander gleich sind, nur in verkehrter Ordnung, was auch zu erwarten war, da $(a+b)^m = (b+a)^m$.

2) Der Koeffizient eines jeden Gliedes ist ein Bruch, dessen Zähler das Produkt der Exponenten von a in den vorausgehenden Gliedern, dessen Nenner das Produkt so vieler in natürlicher Ordnung folgender Zahlen von 1 angefangen ist, als Glieder vorhergehen.

3) Ist m eine ganze positive Zahl, so wird für $n = m$ der Koeffizient $= 1$, indem dann die Faktoren des Zählers den Faktoren des Nenners, in verkehrter Ordnung, gleich sind. In den folgenden Gliedern wird der Koeffizient immer $= 0$, weil einer der Faktoren $(m-n)$ seines Zählers $= 0$ wird; damit verschwindet auch jedes folgende Glied, und die Reihe ist eine endliche. Ist aber m eine negative oder gebrochene Zahl, so kann n nie $= m$ werden, also die Reihe nie endigen.

4) Setzt man $m = 2$, so erhält man die in §. 105 aufgestellte Quadrirungsformel: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + \frac{2 \cdot 1}{1.2} a^0 b^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Für $m = 3$ ist

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + \frac{3.2}{1.2} ab^2 + \frac{3.2.1}{1.2.3} a^0 b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

(§. 115).

5) Setzt man nach und nach $m = 2, 3, 4, 5, 6 \ldots$, so stellen sich die Koeffizienten der zweiten, dritten, vierten, fünften, sechsten ... Würde in den so genannten figurirten Zahlen dar:

1, 2, 1
1, 3, 3, 1
1, 4, 6, 4, 1
1, 5, 10, 10, 5, 1
1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.

Hier steigen die Koeffizienten vom Anfange bis in die Mitte, nehmen aber darauf in der nämlichen Ordnung wieder ab. Bei den geraden Potenzen steht der größte Koeffizient in der Mitte; bei den ungeraden aber sind zwei mittlere, welche die größten und gleich sind.

Dieß geht auch aus §. 68. I. 3° hervor, nach welchem die Anzahl der Kombinationen von n Elementen zur m^{ten} und $(n-m)^{ten}$ Klasse einander gleich sind. Deßhalb mußte z. B. der dritte Koeffizient der 6ten Würde $= {}^6B = \frac{6.5}{1.2} = 15$ auch gleich seyn dem fünften Koeffizienten, welcher die Anzahl der Kombinationen von 6 Elementen zur $6-2 = 4^{ten}$ Klasse enthält, oder gleich ist ${}^6D = \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} = 15$.

6) Der Koeffizient eines jeden Gliedes enthält auch die Permutationszahl für die Potenzen von a und b des nämlichen Gliedes. Verlangt man z. B. das fünfte Glied der siebenten Würde von $a+b$, so wird dieß, da $m=7$, $n=4$ ist, $=\frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}a^3b^4$ $=35a^3b^4$ seyn. Für $3+4=7$ Elemente, von denen das eine 3, das andere 4mal wiederholt ist, ist die Permutationszahl $=\frac{1.2.3.4.5.6.7}{1.2.3.1.2.3.4}=35$. Vgl. §. 66. II. u. §. 69. Zus. 2.

7) Setzt man im Binomium b negativ, so werden auch jene Glieder der Reihe negativ, welche die Potenz von b mit ungeradem Exponenten enthalten, d. i. das zweite, vierte, sechste Glied ꝛc.; die übrigen Glieder bleiben positiv. (Vgl. §. 78. Zus. 2). Die Zeichen der Glieder wechseln also:

$$(a-b)^m=a^m-ma^{m-1}b+\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}b^3+\ldots$$

§. 126.

Der allgemeine Ausdruck des Binomiums $(a\pm b)^m$, wenn man Kürze halber die Koeffizienten vom zweiten Gliede an wieder durch A, B, C, D, E, u. s. w. ausdrückt, ist nun dieser:

$$(a\pm b)^m=a^m\pm Aa^{m-1}.b^1+Ba^{m-2}.b^2\pm Ca^{m-3}.b^3$$
$$+Da^{m-4}.b^4\pm E.a^{m-5}.b^5+\ldots.Ma^{m-n}.b^n.$$

Wenn $n=m$ ist, so wird das letzte Glied des Binomiums seyn $Za^{m-m}b^m=Za^0b^m$.

Diese Reihe läßt sich aber noch bequemer also darstellen.

$$\text{Da } a+b=a\left(1+\frac{b}{a}\right);$$

$$\text{so ist auch } (a+b)^m=a^m\left(1+\frac{b}{a}\right)^m,$$

d. h. man suche die Reihe von $\left(1+\frac{b}{a}\right)^m$, und multiplizire sie am Ende mit a^m.

Setzt man nun Kürze halber $\frac{b}{a}=q$; so erhält man

$$a^m(1+q)^m=a^m(1+Aq^1+Bq^2+Cq^3+Dq^4+Eq^5\ldots.Zq^n).$$

Z. B. Man erhebe nach dieser Formel $(a+b)$ zur sechsten Würde.

Auflösung. $(a+b)^6 = a^6\left(1+\frac{b}{a}\right)^6$

$$= a^6\left(1+\frac{6}{1}\cdot\frac{b}{a}+\frac{6.5}{1.2}\cdot\frac{b^2}{a^2}+\frac{6.5.4}{1.2.3}\cdot\frac{b^3}{a^3}+\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}\cdot\frac{b^4}{a^4}\right.$$
$$\left.+\frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{b^5}{a^5}+\frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6}\cdot\frac{b^6}{a^6}\right)$$
$$= a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6.$$

§. 127.

Um endlich die Koeffizienten, welche im Rechnen die größte Beschwerde verursachen, noch mehr abzukürzen, und zugleich eine Norm zu haben, wie der nächstfolgende Koeffizient aus dem Vorhergehenden zu bestimmen sey, hat man nur nothwendig, das allgemeine Glied zu finden, mit welchem der Koeffizient im nächstvorhergehenden Gliede zu multipliziren ist. Dieses allgemeine Glied ist $\frac{m-\delta}{1+\delta}$, wo m den Grad des Binomiums, δ aber der Ordnung nach die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4 .. vorstellt.

Nach dieser Voraussetzung ist also

$$A = 1\times\frac{m}{1} = \frac{m}{1}.$$
$$B = A\times\frac{m-1}{1+1}.$$
$$C = B\times\frac{m-2}{1+2}.$$
$$D = C\times\frac{m-3}{1+3}.$$
$$E = D\times\frac{m-4}{1+4}.$$
$$F = E = \frac{m-5}{1+5}.$$
$$Z = Y\times\frac{m-\delta}{1+\delta}.$$

§. 128.

Der binomische Lehrsatz gilt auch für den Fall, daß der Exponent der Würde eine gebrochene Zahl, oder $= \frac{m}{n}$ ist, d. h.

$$(a+b)^{\frac{m}{n}} \text{ oder } \sqrt[n]{(a+b)^m} = a^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} a^{\frac{m}{n}-1} \cdot b$$

$$+ \frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)}{1 \cdot 2} a^{\frac{m}{n}-2} \cdot b^2 + \frac{\frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n}-1 \cdot \frac{m}{n}-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{\frac{m}{n}-3} \cdot b^3$$

$$+ \ldots\ldots$$

Beweis.

I. Setzt man den Exponenten $= \varepsilon$, als einer ganzen Zahl, so ist:

$$(a+b)^{\varepsilon} = a^{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{1} a^{\varepsilon-1} b + \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon-1}{1.2} a^{\varepsilon-2} b^2$$

$$+ \frac{\varepsilon \cdot \varepsilon-1 \cdot \varepsilon-2}{1.2.3} a^{\varepsilon-3} b^3 + \ldots\ldots$$

II. Setzt man diese Reihe 2, 3, 4, ... oder überhaupt nmal als Faktor, und verrichtet man die Multiplikation, so läßt sich nachweisen, daß man dadurch nachstehende gesetzmäßige Reihen erhalte:

$$1^\circ)\ a^{2\varepsilon} + 2\varepsilon \cdot a^{2\varepsilon-1} b + \frac{2\varepsilon \cdot 2\varepsilon-1}{1.2} a^{2\varepsilon-2} b^2$$

$$+ \frac{2\varepsilon \cdot 2\varepsilon-1 \cdot 2\varepsilon-2}{1.\ 2.\ 3} a^{2\varepsilon-3} b^3 + \ldots.$$

$$2^\circ)\ a^{3\varepsilon} + 3\varepsilon \cdot a^{3\varepsilon-1} b - \frac{3\varepsilon \cdot 3\varepsilon-1}{1.2} a^{3\varepsilon-2} b^2$$

$$+ \frac{3\varepsilon \cdot 3\varepsilon-1 \cdot 3\varepsilon-2}{1.\ 2.\ 3} a^{3\varepsilon-3} b^3 + \ldots.$$

$$\ldots\ldots$$

$$3^\circ)\ a^{4\varepsilon} + 4\varepsilon \cdot a^{4\varepsilon-1} b + \frac{4\varepsilon \cdot 4\varepsilon-1}{1.2} a^{4\varepsilon-2} b^2$$

$$+ \frac{4\varepsilon \cdot 4\varepsilon-1 \cdot 4\varepsilon-2}{1.\ 2.\ 3} a^{4\varepsilon-3} b^3$$

$$4^\circ)\ a^{n\varepsilon} + n\varepsilon \cdot a^{n\varepsilon-1} b + \frac{n\varepsilon \cdot n\varepsilon-1}{1.\ 2} a^{n\varepsilon-2} b^2$$

$$\ldots\ldots + \frac{n\varepsilon \cdot n\varepsilon-1 \cdot n\varepsilon-2}{1.\ 2.\ 3} a^{n\varepsilon-3} b^3 + \ldots.$$

III. Eben diese Reihen wird man aber auch erhalten, wenn man $\varepsilon = \frac{m}{n}$ setzt; denn der Werth von ε hat keinen Einfluß auf den Kalkul.

IV. Substituirt man nun in der Reihe 4° für e den Werth $\frac{m}{n}$, so erhält man:

$$a^m + ma^{m-1}b + \frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}b^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}a^{m-3}b^3 + \ldots$$

V. Diese Reihe aber gleicht der m^{ten} Potenz von $a+b$; daher ist

VI. $$a^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}.a^{\frac{m}{n}-1}b + \frac{\frac{m}{n}.\frac{m}{n}-1}{1.2}.a^{\frac{m}{n}-2}b^2 + \frac{\frac{m}{n}.\frac{m}{n}-1.\frac{m}{n}-2}{1.2.3}a^{\frac{m}{n}-3}b^3 + \ldots = \sqrt[n]{(a+b)^m} = (a+b)^{\frac{m}{n}}$$ q. e. d.

* Die weitere Reduktion dieser Formel s. in §. 132, ihre Anwendung in §. 133.

§. 129.

Der binomische Lehrsatz gilt auch für den Fall, daß der Exponent der Würde negativ ist.

Beweis. I. Man erhebe $(a+b)$ zur -2ten Potenz, oder man theile 1 durch $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, und man erhält den Quotus

$$a^{-2} - 2a^{-3}b + 3a^{-4}b^2 - 4a^{-5}b^3 + 5a^{-6}b^4 - 6a^{-7}b^5 + \ldots\ldots$$

II. Dieser Quotus ist die gesetzmäßige Reihe für den Exponenten $-m = -2$; oder $(a+b)^{-m} =$

$$a^{-m} - ma^{-(m+1)}b + \frac{m.m+1}{1.2}a^{-(m+2)}b^2 - \frac{m.m+1.m+2}{1.2.3}a^{-(m+3)}b^3 + - + - \ldots$$

III. Erhebt man nun diese Reihe zu der nächst höhern negativen Potenz, d. i. dividirt man dieselbe durch $a+b$, so wird der Quotus in jeder Hinsicht die gesetzmäßige Reihe für $-m = -3$ seyn.

Operation.

Quotus. $a^{-(m+1)} - m+1.a^{-(m+2)}.b + \frac{m+1.m+2}{1.\ 2}a^{-(m+3)}.b^2 - \frac{m+1.m+2.m+3}{1.\ 2.\ 3}a^{-(m+4)}.b^3 + \ldots$

$a^{-m} - ma^{-(m+1)}b + \frac{m.m+1}{1.\ 2}a^{-(m+2)}b^2 - \frac{m.m+1.m+2}{1.\ 2.\ 3}a^{-(m+3)}b^3 + \ldots$

$(a + b)$

$a^{-m} + a^{-(m+1)}b$

$-(m+1)a^{-(m+1)}b + \frac{m.m+1}{1.\ 2}a^{-(m+2)}b^2$

$(a + b)$

$-(m+1)a^{-(m+1)}b - (m+1)a^{-(m+2)}b^2$

$+\frac{m+2.m+1}{1.\ 2}a^{-(m+2)}b^2 - \frac{m.m+1.m+2}{1.\ 2.\ 3}a^{-(m+3)}b^3$

$(a + b)$

$\frac{m+2.m+1}{1.\ 2}a^{-(m+2)}b^2 + \frac{m+1.m+2}{1.\ 2}a^{-(m+3)}b^3$

$-\frac{m+1.m+2.m+3}{1.\ 2.\ 3}a^{-(m+3)}b^3 + \frac{m.m+1.m+2.m+3}{1.\ 2.\ 3.\ 4}a^{-(m+4)}b^4 \ldots$

$(a + a)$

u. ſ. w.

Es ist klar, daß, wenn man mit a theilt, der negative Exponent, von a um 1 —; eben so einleuchtend ist es, daß, wenn man das Produkt aus jedem einzelnen Quotus in b zu dem unmittelbar folgenden Gliede addirt, jeder Faktor im Zähler des Koeffizienten ebenfalls um 1 größer werden müsse. Die Exponenten von b bleiben unverändert.

Alle Glieder des Quotienten sind demnach von der Form, welche sich dafür darstellt, wenn man in der allgemeinen Formel des binomischen Lehrsatzes §. 124. $-(m+1)$ statt $+m$ substituirt, alle von der Form der oben unter II. aufgestellten Formel, und daher gesetzmäßig gebildet. Da nun die Gesetzmäßigkeit der Reihe für $-m = -2$ gefunden ist, so folgt sie nach der zuletzt entwickelten Formel auch für jede höhere negative Potenz von $a+b$. Vergl. §. 123. III.

Bezeichnet auch m was immer für eine ganze Zahl, so wird

$$(a+b)^{-m} = a^{-m} - ma^{-(m+1)}b + \frac{m.m+1}{1.\ 2}a^{-(m+2)}b^2 - \frac{m.m+1.m+2.}{1.\ 2.\ 3.}a^{-(m+3)}b^3 + \ldots\ldots$$

Anmerkung.

Daß $(a+b)^{-m} = a^{-m} - ma^{-(m+1)}b + \frac{m(m+1)}{1.2}a^{-(m+2)}b^2 - \ldots = P$, läßt sich auch so nachweisen, daß man zeigt, die dem P entsprechende Reihe gebe mit der dem $(a+b)^m$ entsprechenden multiplizirt eben so 1 zum Produkte, wie $(a+b)^{-m} \times (a+b)^m = (a+b)^{\circ} = 1$; indem nämlich das Produkt der ersten Glieder der beiden Reihen $a^m \times a^{-m} = 1$, das Produkt der Koeffizienten aller übrigen Glieder $= 0$ werde.

Folgesatz. Aus der Verbindung dieser beiden Beweise läßt sich leicht zeigen, daß der binomische Lehrsatz auch für den Fall gelte, wenn der Exponent eine negative Fraktion ist; wenn nämlich

$$(a+b)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a+b)^m}$$ ist, so muß auch

$$(a+b)^{-\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a+b)^{-m}}$$ seyn.

* Die weitere Entwicklung dieser Reihe s. §. 135.

§. 130.

§. 130.

Aufgabe. Das Binomium $(a+b)^{-m}$, d. i. $\left(\frac{1}{(a+b)^m}\right)$ zu potenziren, oder in eine unendliche Reihe zu verwandeln.

Auflösung. I. Man bestimme zuerst die Exponenten von a und b, indem man in der Reihe §. 124. $-m$ statt m substituirt, und dann die einzelnen Glieder reduzirt:

$$a^{-m},\ a^{(-m-1)}b^1,\ a^{(-m-2)}b^2,\ a^{(-m-3)}b^3,\ a^{(-m-4)}b^4,\ a^{-m-n}b^n$$

$$= a^{-m},\ a^{-(m+1)}b,\ a^{-(m+2)}b^2,\ a^{-(m+3)}b^3,\ a^{-(m+4)}b^4,\ a^{-(m+n)}b^n$$

$$= \frac{b^0}{a^m},\ \frac{b^1}{a^{m+1}},\ \frac{b^2}{a^{m+2}},\ \frac{b^3}{a^{m+3}},\ \frac{b^4}{a^{m+4}},\ \frac{b^n}{a^{m+n}}$$

II. Nun bestimme man auch die Koeffizienten:

$$A = -\frac{m}{1}.$$

$$B = -\frac{m.(-m-1)}{1.\ 2} = \frac{m.(m+1)}{1.\ 2}.$$

$$C = -\frac{m.(-m-1)(-m-2)}{1.\ 2.\ 3} = -\frac{m\times(m+1)(m+2)}{1.\ 2.\ 3}.$$

$$D = +\frac{m(m+1).(m+2).(m+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}.$$

$$E = -\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}.$$

Oder kürzer nach §. 127.

$$(-)\ A = -\frac{m}{1}.$$

$$(+)\ B = -A\times-\left(\frac{m+1}{1+1}\right)$$

$$-\ C = +B\times-\left(\frac{m+2}{1+2}\right)$$

$$+\ D = -C\times-\left(\frac{m+3}{1+3}\right)$$

$$-\ E = +D\times-\left(\frac{m+4}{1+4}\right)$$

$$\pm\ Z = \pm Y\times-\left(\frac{m+\delta}{1+\delta}\right)$$

Anmerkung.

Da auch $(a+b)^{-m} = a^{-m}\left(1+\frac{b}{a}\right)^{-m} = a^{-m}\,(1+f)^{-m}$ ist, so läßt sich die Reihe auch so darstellen:

$$(1+f)^{-m} = 1 - Af + Bf^2 - Cf^3 + Df^4 - \ldots \pm Zf^n$$

§. 131.

Anwendungen.

I. Welches ist die fünfte Würde von $\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y$?

Auflösung. $a = \frac{2}{3}x$,
$b = \frac{1}{2}y$.

$$\left.\begin{array}{rl} a^5 & = \frac{32x^5}{243}. \\ 5a^4b & = \frac{5.16x^4}{81} \times \frac{1}{2}y = \frac{40}{81}x^4y. \\ 10a^3b^2 & = \frac{10.8x^3}{27} \times \frac{1}{4}y^2 = \frac{20}{27}x^3y^2. \\ 10a^2b^3 & = \frac{10.4x^2}{9} \times \frac{1}{8}y^3 = \frac{5}{9}x^2y^3. \\ 5ab^4 & = \frac{5.2x}{3} \times \frac{1}{16}y^4 = \frac{5}{24}xy^4. \\ b^5 & = \frac{y^5}{3^2}. \end{array}\right|$$

Also ist die verlangte Würde von $(\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y)$

$$= \frac{32}{243}x^5 + \frac{40}{81}x^4y + \frac{20}{27}x^3y^2 + \frac{5}{9}x^2y^3 + \frac{5}{24}xy^4 + \frac{1}{32}y^5.$$

II. Welches ist das Quadrat von $\left(\frac{1}{a+b}\right)$? oder $(a+b)^{-2}$ werde in eine unendliche Reihe verwandelt.

Auflösung. (§. 130. Nro. 2.)

$$(a+b)^{-2} = a^{-2} - \frac{2}{1}.a^{-3}b + \frac{2}{1}.\frac{3}{2}.a^{-4}b^2 - 3.\frac{4}{3}a^{-5}b^3 + 4.\frac{5}{4}a^{-6}b^4 - 5.\frac{6}{5}a^{-7}b^5 \ldots.$$

$$= \frac{1}{a^2} - \frac{2b}{a^3} + \frac{3b^2}{a^4} - \frac{4b^3}{a^5} + \frac{5b^4}{a^6} - \frac{6b^5}{a^7} \ldots.$$

III. Man potenzire $\frac{1}{(a+b)^{+3}}$ oder $(a+b)^{-3}$.

Auflösung.

$$(a+b)^{-3} = a^{-3} - \tfrac{3}{1}a^{-4}b + \tfrac{3}{1}\cdot\tfrac{4}{2}a^{-5}b^2 - 6.\tfrac{5}{3}a^{-6}b^3 + 10\tfrac{6}{4}a^{-7}b^4 \ldots$$

$$= \frac{1}{a^3} - \frac{3b}{a^4} + \frac{6b^2}{a^5} - \frac{10b^3}{a^6} + \frac{15b^4}{a^7} - \frac{21b^5}{a^8} + \frac{28b^6}{a^9} \ldots.$$

Setzt man den Exponenten m der Reihe = 1, so erhält man eine unendliche Reihe:

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6} + \frac{b^6}{a^7} \ldots\ldots$$

Wird nun diese Reihe mit $a+b$ multiplizirt, so muß nothwendiger Weise der Zähler der Fraktion, d. i. 1, als Produkt erscheinen.

§. 132.

Aufgabe. Aus Binionen eine Wurzel auszuziehen.

Auflösung.

Da sich Wurzelgrößen in Würden mit gebrochenen Exponenten verwandeln lassen (§. 91.), und z. B.

$$\sqrt{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{2}},$$

$$\sqrt[3]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{3}},$$

$$\sqrt[n]{(a+b)^m} = (a+b)^{\frac{m}{n}}$$ ist; so hat man weiter nichts zu thun, als anstatt des Exponenten m den Exponenten $\frac{m}{n}$ zu substituiren, und darnach die Würden von a, und die Koeffizienten zu bestimmen.

I. Man bestimme die Exponenten von a und b.

$$a^{\frac{m}{n}}, a^{\frac{m}{n}-1}.b, a^{\frac{m}{n}-2}.b^2, a^{\frac{m}{n}-3}.b^3, a^{\frac{m}{n}-4}.b^4, a^{\frac{m}{n}-5}.b^5 + \ldots.$$

$$= a^{\frac{m}{n}}, a^{\frac{m-n}{n}}b, a^{\frac{m-2n}{n}}b^2, a^{\frac{m-3n}{n}}b^3, a^{\frac{m-4n}{n}}b^4, a^{\frac{m-5n}{n}}b^5 + \ldots$$

Anmerkung. Man sieht hier, daß diese Reihe nicht wohl anwendbar sey, indem a in lauter Irrationalzahlen erscheint, und man also eben so viele Wurzeln auszuziehen hätte, als die Reihe Glieder erhält. Diese Schwierigkeit verschwindet aber, wenn man bedenkt, daß sich jedes Binomium in solche zwei Theile zerlegen lasse, wovon der erste (a) eine Würde vom Grade n ist, d. h. $a = \triangle^n$;

folglich $a^{\frac{m}{n}} = \triangle^{\frac{mn}{n}} = \triangle^m$.

2. **Anmerkung.** Setzt man nun wieder $(a+b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}}\left(1+\frac{b}{a}\right)^{\frac{m}{n}}$

und $\frac{b}{a} = f$; so erhält man die Reihe:

$$a^{\frac{m}{n}}(1+Af+Bf^2+Cf^3+Df^4+Ef^5+Ff^6.....Zf^{z-1}).$$

II. Nun bestimme man auch die Koeffizienten:

$$A = \frac{m}{1.n}.$$

$$B = \frac{m.(m-n)}{1.2.n^2}.$$

$$C = \frac{m.(m-n).(m-2n)}{1.2.3.n^3}$$

$$D = \frac{m.(m-n).(m-2n).(m-3n)}{1.2.3.4.n^4}.$$

$$E = \frac{m.(m-n).(m-2n).(m-3n).(m-4n)}{1.2.3.4.5.n^5} \text{ u. s. w.}$$

Oder noch kürzer:

$$A = \frac{m}{n}. \quad (\text{und wenn } \frac{m}{n} = q) \ldots q$$

$$B = \frac{A.(m-n)}{2n} \ldots\ldots\ldots \frac{A.(q-1)}{1.2}.$$

$$C = \frac{B.(m-2n)}{3n} \ldots\ldots\ldots \frac{B.(q-2)}{3}.$$

$$D = \frac{C.(m-3n)}{4n} \ldots\ldots\ldots \frac{C.(q-3)}{4}.$$

$$E = \frac{D.(m-4n)}{5n} \text{ u. s. w. } \ldots = \frac{D.(q-4)}{5}.$$

§. 133.

Anwendung. I. Welches ist die Quadratwurzel aus $(a+b)$? oder $\sqrt{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{2}}$.

Auflösung. Man setze $a = q^2$; folglich $(q^2+b)^{\frac{1}{2}} = q\left(1+\frac{b}{q^2}\right)^{\frac{1}{2}}$... und $\frac{b}{q^2} = f$;

so erhält man: $q(1+\frac{1}{2}f-\frac{1}{8}f^2+\frac{1}{16}f^3-\frac{5}{128}f^4\ldots) = \sqrt{(a+b)}$.

* Es sey $\sqrt{(a+b)} = \sqrt{26}$ und $a = 25$; folglich $b = 1$ und $f = \frac{1}{25} = 0{,}04$; $q = 5$.

So ist die Wurzel aus 26

$5\ (1+0{,}02-0{,}0002+0{,}000004-0{,}0000001\ldots)$

$=5\,(1{,}019039) = 5{,}0990195$ bis auf die siebente Zifferstelle ganz genau.

II. Welches ist die Kubikwurzel aus $(a+b)$? — oder $\sqrt[3]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{3}}$.

Auflösung. Man setze $(a+b)^{\frac{1}{3}} = (c^3+b)^{\frac{1}{3}} = c\left(1+\frac{b}{c^3}\right)^{\frac{1}{3}}$ und $\frac{b}{c^3} = f$; so erhält man

$c(1+\frac{1}{3}f-\frac{1}{9}f^2+\frac{5}{18}f^3-\frac{10}{243}f^4+\frac{22}{729}f^5-\frac{154}{2187}f^6..) = \sqrt[3]{(a+b)}$.

* Man habe die Aufgabe: $\sqrt{(200)}$..

d. i. $a+b = 200$. Es sey $a = c^3 = 125$,

$b = 75$, $\frac{b}{c^3} = \frac{75}{125} = \frac{3}{5} = 0{,}6$;

so ist die Kubikwurzel aus 200

$= (1+0{,}2-0{,}04+0{,}01333\ldots-0{,}00533\ldots.$
$+0{,}0023466\ldots)\,5$
$= 5\times 1{,}17034\ldots. = 5{,}85.$

Es ist aber der Kubus von $(5{,}85) = 200{,}20$; mithin nur $\frac{2}{10}$ größer als 200.

§. 134.

Aufgabe. Von einer Irrationalzahl eine Wurzel, von der schon ein Theil bekannt ist, durch schnelle Näherung zu finden.

Auflösung. Die gegebene Irrationalzahl, aus welcher die n^{te} Wurzel gezogen werden soll, sey $= A$, der (aus Potenzen- oder Logarithmen-Tafeln) schon nach einer, oder einigen Dezimalstellen bekannte Theil der Wurzel $= a$, der noch fehlende $= x$; so wird $\sqrt[n]{A} = a + x$.

Erhebt man die beiden Ausdrücke zur ^{nten} Würde, so wird nach §. 10, Axiom 10

$$A = (a+x)^n, \text{ also}$$

$$A = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}x^2 + \ldots\ldots$$

Da x nur ein kleiner Bruch seyn kann, so kann man die höhern Potenzen von x, welche noch kleiner wären, übergehen, und setzen: $A = a^n + na^{n-1}x$. Zieht man auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens a^n ab, so erhält man nach jenem Axiom:

$$A - a^n = na^{n-1}x.$$

Dividirt man beiderseits durch na^{n-1}, so ist

$$\frac{A-a^n}{na^{n-1}} = x$$

Nimmt man, um sich dem Werthe noch mehr zu nähern, auch noch das dritte Glied obiger Reihe; so ist, wenn man wieder a^n von beiden Seiten subtrahirt,

$$A - a^n = na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}x^2$$

$$= x\left(na^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}x\right).$$

Dividirt man die beiden Seiten der Gleichung durch den Mitfaktor von x, nämlich $na^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}x$; so ist

$$x = \frac{A-n}{na^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}x}$$

Setzt man an die Stelle des im Nenner stehenden x den diesem gleichen Ausdruck: $\frac{A-a^n}{na^{n-1}}$, so erhält man

$$x = \frac{A - a^n}{na^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} a^{n-2} \times \left(\frac{A-a^n}{na^{n-1}}\right)}.$$

Reduzirt man diesen Ausdruck, so ist

$$x = \frac{2a(A-a^n)}{2na^n + n(n-1)\left(\frac{A-a^n}{n}\right)}$$

$$= \frac{2a(A-a^n)}{(n+1)a^n + (n-1)A}.$$

Anmerkung. Diese Formel heißt nach ihrem Erfinder die Lambertische.

Zusatz. Setzt man $n = 2, 3, 4, 5,$ so wird

für $\sqrt{A}$, $n = 2$, $x = \frac{2a(A-a^2)}{3a^2+A}$

— $\sqrt[3]{A}$, $n = 3$, $x = \frac{2a(A-a^3)}{4a^3+2A} = \frac{a(A-a^3)}{2a^3+A}$

— $\sqrt[4]{A}$, $n = 4$, $x = \frac{2a(A-a^4)}{5a^4+3A}$

— $\sqrt[5]{A}$, $n = 5$, $x = \frac{2a(A-a^5)}{6a^5+4A} = \frac{a(A-a^5)}{3a^5+2A}$

Beispiel. Man ziehe die Kubikwurzel aus 28.

Auflösung. $\sqrt[3]{28}$ ist annähernd $= 3{,}03$, also $A = 28$, $a = 3{,}03$, $n = 3$.

$$x = \frac{3{,}03(28-3{,}03^3)}{2.3{,}03^3+28} = \frac{3{,}03(28-27{,}818127)}{2.27{,}818127+28}$$

$$= \frac{0{,}55107519}{83{,}636254} = 0{,}006588952$$

Daher $\sqrt[3]{28} = 3{,}036588952$.

* Wollte man die Kubikwurzel aus 28 noch genauer wissen, so könnte man $a = 3{,}036588952$ neuerdings in obige Formel substituiren.

§. 135.

Hat man endlich Binomien zu potenziren, deren Exponent ein negativer Bruch ist, so verfährt man ganz, wie §. 132 gezeigt

wurde; nur die Zeichen der Glieder wechseln, und die Exponenten von a sind durchaus negativ.

Aufgabe. Das Binomium $\frac{1}{(a+b)^{\frac{m}{n}}}$ oder $(a+b)^{-\frac{m}{n}}$ zu potenziren.

Auflösung. I. Man bestimme die Exponenten von a und b.

$$a^{-\frac{m}{n}},\ a^{-\left(\frac{m}{n}+1\right)}b,\ a^{-\left(\frac{m}{n}+2\right)}b^2,\ a^{-\left(\frac{m}{n}+3\right)}b^3,\ a^{-\left(\frac{m}{n}+4\right)}b^4$$

$$= a^{-\frac{m}{n}},\ a^{-\left(\frac{m+n}{n}\right)}b,\ a^{-\left(\frac{m+2n}{n}\right)}b^2,\ a^{-\left(\frac{m+3n}{n}\right)}b^3,\ a^{-\left(\frac{m+4n}{n}\right)}b^4$$

$$= \frac{b^0}{a^{\frac{m}{n}}},\ \frac{b^1}{a^{\frac{m+n}{n}}},\ \frac{b^2}{a^{\frac{m+2n}{n}}},\ \frac{b^3}{a^{\frac{m+3n}{n}}},\ \frac{b^4}{a^{\frac{m+4n}{n}}}\ \text{ꝛc.}$$

II. Nun bestimme man auch die Koeffizienten.

$$A = -\frac{m}{n}.$$

$$B = +\frac{m.(m+n)}{1.\ 2n^2}.$$

$$C = -\frac{m.(m+n).(m+2n)}{1.\ 2.\ 3n^3}.$$

$$D = +\frac{m.(m+n).(m+2n).(m+3n)}{1.\ 2.\ 3.\ 4n^4}.$$

$$E = -\frac{m.(m+n).(m+2n).(m+3n).(m+4n)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5n^5}\ \text{u. s. w.}$$

(vergl. §. 132.)

Setzt man nun wieder $(a+b)^{-\frac{m}{n}} = a^{-\frac{m}{n}}\left(1+\frac{b}{a}\right)^{-\frac{m}{n}}$ und ist $a = y^n$, folglich $a^{-\frac{m}{n}} = y^{-m}$ und $\frac{b}{a} = p$, so erhält man wieder:

$$(1-Ap+Bp^2-Cp^3+Dp^4-Ep^5+Fp^6\ldots)\,y^{-m} = (a+b)^{-\frac{m}{n}}.$$

Anwendung. Man ziehe die Kubikwurzel aus $\frac{2}{3}$; oder verwandle $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{8}{12}} = \frac{2}{(12)^{\frac{1}{3}}} = 2\times(12)^{-\frac{1}{3}}$ in eine unendliche Reihe.

Auflösung. Es sey $a = 3$, $b = 4$, folglich $\frac{b}{a} = f = \frac{1}{2}$;

also $2 \times 8^{-\frac{1}{3}} \times (1+\frac{1}{2})^{-\frac{1}{3}} = 2 \times \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2})^{-\frac{1}{3}} = (1+\frac{1}{2})^{-\frac{1}{3}}$;

$$(1+f)^{-\frac{1}{3}} = 1 - \tfrac{1}{3}f + \tfrac{2}{9}f^2 - \tfrac{14}{81}f^3 + \tfrac{35}{243}f^4 - \tfrac{91}{729}f^5 + \tfrac{728}{6561}f^6 \ldots\ldots$$

Substituirt man für f, f^2 ꝛc. seinen Werth, und drückt die gemeinen Fraktionen in Dezimalen aus, so erhält man:

Positive	Negative Glieder.
+ 1,000000	— 0,166666
0,055555	0,021605
0,009000	— 0,003900
0,001733	— 0,192171.
Summe + 1,066288	

Differenz 1,066288
— 0,192179
0,874171.

Wovon der Kubus 0,6676..... nur noch um 0,0010 grösser ist, als 0,666.. = $\frac{2}{3}$.

§. 136.

Aufgabe. Ein Polynomium nach dem binomischen Lehrsatze zu einer Würde zu erheben.

Auflösung. Man bringe das gegebene Polynomium dadurch, daß man alle Glieder, mit Ausnahme des ersten oder letzten, in Parenthesen einschließt, und so als ein Glied darstellt, auf die Form eines Binomiums, und erhebe es als solches zur verlangten Würde. In der Folge kann die Operation rücksichtlich der eingeklammerten Größen wirklich vorgenommen werden.

Beispiel. Welches ist die fünfte Würde von $(a+b-c)$?

Operation.

$$(a+(b-c))^5 = a^5 + 5a^4(b-c)^1 + 10a^3(b-c)^2 + 10a^2(b-c)^3 + 5a(b-c)^4 + (b-c)^5.$$

Nun ist
$$(b-c)^2 = b^2 - 2bc + c^2$$
$$(b-c)^3 = b^3 - 3b^2c + 3bc^2 - c^3$$
$$(b-c)^4 = b^4 - 4b^3c + 6b^2c^2 - 4bc^3 + c^4$$
$$(b-c)^5 = b^5 - 5b^4c + 10b^3c^2 - 10b^2c^3 + 5bc^4 - c^5$$

Mithin ist $(a+b-c)^5 =$

$$a^5+5a^4b-5a^4c+10a^3b^2-20a^3bc+10a^3c^2+10a^2b^3$$
$$-30a^2b^2c+30a^2bc^2-10a^2c^3+5ab^4-20ab^3c$$
$$+30ab^2c^2-20abc^3+5ac^4+b^5-5b^4c+10b^3c^2-10b^2c^3+5bc^4-c^5.$$

Anmerkung. Die Auflösung obiger Aufgabe mittelst der Variationen s. §. 69. Zus. 2.

Zweite Abtheilung.

Algebra.

Von der Algebra überhaupt.

Vorbegriffe.

§. 137.

Algebra ist jener Theil der Mathematik, welcher unbekannte Größen aus bekannten Eigenschaften derselben durch Gleichungen finden lehrt.

I. **Gleichung** (Aequatio) ist der doppelte Ausdruck einer und der nämlichen Größe, durch das Aequationszeichen zusammengestellt.

Z. B. $a+b=3a+2b-2a-b$.

$$x-y=\frac{ax-ay}{a}.$$

Die beiden Ausdrücke der nämlichen Größe heißen die Seiten (latera); die durch + oder — verbundenen Größen aber die Glieder der Gleichung (termini aequationis). Z. B. in der ersten Gleichung stellt $a+b$ die eine, $3a+2b-2a-b$ die andere Seite vor. Die erste Seite besteht aus zwei, die andere aus vier Gliedern.

II. Im engern Sinne ist Gleichung die Gleichstellung verschieden ausgedrückter Beziehungen von unbekannten Größen zu bekannten, wodurch eine unbekannte Größe aus bekannten Eigenschaften derselben gefunden wird. — Man bezeichnet aber die unbekannten, d. i. zu suchenden Größen durch die Endesbuchstaben v, x, y, z; die bekannten Größen aber durch die übrigen Buchstaben des Alphabets, oder durch Zahlen.

III. Man theilt die Gleichungen ein:

a) nach der Zahl der unbekannten Größen,

1) in Gleichungen mit einer,

2) in Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen;

b) nach dem Exponenten der unbekannten Größe,

1) in Gleichungen des ersten Grades, oder einfache, wenn die unbekannte Größe, nachdem sie nicht mehr als Divisor und zugleich als Faktor (verschiedener Glieder) steht, eine einfache Größe ist, und die erste Potenz nicht überschreitet;

2) in Gleichungen eines höhern Grades, oder zusammengesetzte, wenn die unbekannte Größe die erste Potenz übersteigt; und zwar heißen diese höhern Gleichungen quadratische, kubische, biquadratische, je nachdem die höchste Würde der unbekannten Größe ein Quadrat, Kubus oder Biquadrat ist.

Die höhern Gleichungen sind ferner

α) reine, wenn die unbekannte Größe nur in einer und der nämlichen Potenz,

β) unreine, wenn sie in verschiedenen Potenzen vorkommt.

c) nach der Zahl der möglichen Werthe oder Wurzeln einer Gleichung,

1) in bestimmte, wenn für die unbekannte Größe nur ein Werth,

2) in unbestimmte Gleichungen, wenn für die unbekannte Größe mehrere Werthe möglich sind.

d) nach der Art der Verbindung der unbekannten Größe mit bekannten

1) in algebraische, wenn die unbekannte Größe mit den bekannten durch die vier Stammrechnungsarten verbunden, oder zu einer Würde erhoben ist, deren Exponent eine ganze oder gebrochene Zahl seyn mag.

2) in transcendente, wenn die unbekannte Größe als Exponent, oder in Verbindung mit Logarithmus, Sinus ꝛc. vorkommt. Z. B. $a^x = b$, $\log x = c$.

§. 138.

Die Behandlungsart der Gleichungen bezieht sich auf folgende drei Punkte, welche auch die Momente der Algebra genannt werden:

I. Die Formation oder Bildung der Gleichung aus den gegebenen Bedingungen und bekannten Eigenschaften der unbekannten Größen. Dadurch wird die Aufgabe aus der bürgerlichen Sprache in die algebraische übertragen. Vgl. §. 143.

II. Die Reduktion, wodurch man der Gleichung eine einfachere und schicklichere Gestalt gibt, vorzüglich wenn die unbekannte Größe als Nenner, oder Wurzelgröße, oder auf beiden Seiten vorkommt.

III. Die Solution, oder endliche Reduktion, wodurch die Gleichung zu Ende gebracht, und der Werth der unbekannten Größe, d. i. eine Zahl gefunden wird, welche allen gegebenen Bedingungen der Gleichung entspricht. — Diese gefundene Zahl (oder Zahlen, wenn eine Gleichung deren mehrere zuläßt) nennt man die Werthe oder Wurzeln der Gleichung. — Eine Gleichung ist aufgelöset, wenn sie die Form hat, daß auf einer Seite derselben die unbekannte Größe nur einmal, allein, positiv und mit dem Koeffizienten und Exponenten 1 steht, auf der andern Seite nur bekannte Größen vorkommen. Alle Umformungen, welche man zu diesem Zwecke mit einer Gleichung vornimmt, beruhen auf dem Axiome: Gleiches auf gleiche Weise verändert, gibt Gleiches. Vgl. §. 10. 10°.

Die Solution muß durch die Probe bewährt werden. Es besteht aber diese darin, daß man für die unbekannte Größe ihr Aequivalent setzt (substituirt), worauf die gegebene Gleichung unverändert bleiben muß, wenn die Solution richtig geschehen seyn soll.

I. Abschnitt.

Algebra im engern Sinne.

§. 139.

Die Ordnung, in welcher die Gegenstände dieses Abschnittes vorgetragen werden, ergibt sich aus folgender Uebersicht:

Erstes Hauptstück. Bestimmte Analytik, oder von der Lösung bestimmter Probleme.

Erster Artikel. Einfache Gleichungen mit einer unbekannten Größe.

Zweiter Artikel. Einfache Gleichungen mit mehreren unbekannten Größen.

Dritter Artikel. Höhere, und zwar reine, und unreine quadratische Gleichungen.

Vierter Artikel. Reine und unreine kubische Gleichungen.

Fünfter Artikel. Reine und unreine biquadratische Gleichungen.

Sechster Artikel. Höhere Gleichungen überhaupt.

Zweites Hauptstück. Unbestimmte Analytik, oder von der Lösung unbestimmter Probleme.

Erster Artikel. Von den unbestimmten Problemen überhaupt.

Zweiter Artikel. Von der Regula Coeci oder Virginum.

I. Hauptstück.

Bestimmte Analytik.

§. 140.

Der Unterschied zwischen bestimmten und unbestimmten Problemen soll durch folgendes Beispiel deutlich werden. Man habe die beiden Aufgaben:

I. Zwei Zahlen zu finden, welche mit einander 100 betragen.

II. Zwei Zahlen zu finden, deren Summe 100, und deren Differenz 6 beträgt.

So erkennt man auf den ersten Anblick, daß die erste Aufgabe unendlich viele Auflösungen in ganzen und gebrochenen, positiven und negativen Zahlen zulasse, mithin ein unbestimmtes Problem sey.

Z. B. $1+99=2+98=3+97=4+96=5+95=6+94$ u. s. w.

$\frac{1}{2}+99\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+99\frac{2}{3}=\frac{2}{3}+99\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+99\frac{3}{4}$ u. s. w.

$101-1=102-2=103-3=104-4=105-5=100$ u. s. w.

Bei der zweiten Aufgabe sind die Bedingungen so beschränkt, daß nur eine Art der Auflösung möglich wird, folglich das Problem bestimmt ist. Da ist nämlich die kleinere Zahl $=47$, die größere $=53$.

$$53+47=100$$
$$53-47=6.$$

Anmerkung 1. In einiger Rücksicht ließen sich alle höhern Gleichungen zur unbestimmten Analytik rechnen; denn es lassen, wie sich in der Folge zeigen wird, die quadratischen Gleichungen je zwei, die kubischen je drei, die biquadratischen je vier verschiedene Wurzeln zu. Da aber selbst die Unbestimmtheit dieser Gleichungen nach sehr bestimmten Regeln geht, und von den mehreren Wurzeln im gemeinen Leben gewöhnlich nur eine brauchbar ist, so mag man die höhern Gleichungen immerhin zur bestimmten Analytik rechnen.

Anmerkung 2. Die bestimmten Probleme haben weit größern Nutzen und größern Umfang, und verdienen in der Behandlung den Vorrang. Darunter sind aber die leichtesten: die einfachen mit einer unbekannten Größe; also

Erster Artikel.

Einfache Gleichungen mit einer unbekannten Größe.

§. 141.

Aufgabe. Eine gegebene einfache Gleichung mit einer unbekannten Größe aufzulösen.

Auflösung.

I. Stehen bei der unbekannten Größe bekannte Größen, so werden diese durch die entgegengesetzte Rechnungsart hinweggeschafft; es steht aber der Addition die Subtraktion, der Multiplikation die Division entgegen, und wechselweise:

Beispiele.

1) $x + a = b$
$\quad -a \quad -a$
$x = b - a$

2) $x - b = c$
$\quad +b \quad +b$
$x = c + b$

* Diese beiden Umformungen, welche sich auf die Axiome gründen: Gleiches von Gleichem subtrahirt, gibt gleiche Differenzen; und Gleiches zu Gleichem addirt, gibt gleiche Summen (§. 26), lassen sich kürzer durch die Regel ausdrücken: Die mittelst des Zeichens + oder — mit der unbekannten Größe verbundenen bekannten Größen setze man mit veränderten Zeichen auf die entgegengesetzte Seite. Z. B. Aus

$x + a - b = c$ erhält man $x = c - a + b$.

3) $ax - b = c$
$ax = c + b$
$x = \frac{c+b}{a}$ (§.40.VI.)

4) $\frac{x-a}{m} = b$ (§.40. VI.)
$x - a = mb$
$x = mb + a$.

Die in vorstehenden Beispielen mit bekannten Größen vorgenommenen Veränderungen lassen sich nach den nämlichen Axiomen auch auf die unbekannte Größe anwenden. Daher

II. Kommt die unbekannte Größe selbst als Nenner oder Divisor vor, so werden damit alle übrigen Glieder der Gleichung multiplizirt.

Z. B. $\frac{450}{x} = 9$
$450 = 9x$
$\frac{450}{9} = 50 = x$

$\frac{a}{x} = b$
$a = bx$
$\frac{a}{b} = x$.

III. Alle Glieder der unbekannten Größe werden auf die eine, und alle bekannten Größen auf die andere Seite gesetzt.

1) $3x - 4 = 7x - 20$
$20 - 4 = 7x - 3x$

2) $ax - b = cx - d$
$ax - cx = b - d$,

IV. Die Koeffizienten der unbekannten Größe werden nun addirt oder subtrahirt, je nachdem die Zeichen der Glieder beschaffen sind; sind die Koeffizienten ungleichartige Buchstabengrößen, so wird die unbekannte Größe als gemeinschaftlicher Faktor davon getrennt, indem man die bekannten Größen in Parenthesen setzt. Dann wird mit der Summe oder Differenz der Koeffizienten in die ganze Gleichung dividirt.

1) $7x - 3x = 20 - 4$
$4x = 16$
$x = \frac{16}{4} = 4$

2) $(a-c)x = b - d$
$x = \frac{b-d}{a-c}$.

V. Sollte die unbekannte Größe negativ erscheinen, so hat man nur die ganze Gleichung mit -1 zu multipliziren, oder alle Zeichen in der Gleichung zu verändern.

Z. B. 1) $9x - 28 = -10x + 10$
$-38 = -19x$
$38 = 19x$
$2 = x$.

Leichter wäre die Aufgabe gelöset worden, wenn ich die negative unbekannte Größe, als die größere, addirt hätte:

$$\begin{array}{r} 9x - 28 = -10x + 10 \\ +10x + 28 = +10x + 28 \\ \hline 19x = 38 \end{array}$$
$x = 2$.

2) $b - ax = c$
$- \quad + \quad -$
$ax = b - c$
$x = \frac{b-c}{a}$

VI. Kommt die unbekannte Größe mit bekannten Größen in Parenthesen vor, so müssen vorher diese gelöset werden.

Z. B. 1) $6(3-x) = 2x-14$
$18-6x = 2x-14$
$32 = 8x$
$4 = x$

2) $a-b(c-x) = c$
$a-bc+bx = c$
$bx = c+bc-a$
$x = \frac{c(1+b)-a}{b}$.

VII. Haben alle Glieder der Gleichung einen gleichen Faktor, so kann durch diesen die Gleichung dividirt werden. Kommt die unbekannte Größe in allen Gliedern als Faktor vor, so kann durch Division eine höhere Gleichung manchmal in eine einfache verwandelt werden. Z. B. $\frac{3}{4}x^2 + 6x^2 = 12x$

$$\frac{1}{4}x + 2x = 4$$
$$x + 8x = 16$$
$$9x = 16$$
$$x = \frac{16}{9} = 1\frac{7}{9}.$$

VIII. Kommt die unbekannte Größe unter einem Wurzelzeichen vor (außer demselben darf es dann nicht mehr stehen, weil sonst die Gleichung nach der Reduktion als eine höhere sich darstellen würde), so werden die außer dem Wurzelzeichen stehenden Größen auf die entgegengesetzte Seite gesetzt, und dann die beiden Seiten zur Würde des Wurzelexponenten erhoben.

Z. B. $a + \sqrt{fx - a^2} = b$

$$\sqrt{fx - a^2} = b - a$$
$$fx - a^2 = (b-a)^2$$
$$fx = b^2 - 2ab + a^2 + a^2$$
$$x = \frac{b^2 - 2ab + 2a^2}{f}.$$

Anmerkung 1. Auf ähnliche Art können auch jene Vergleichungen von Größen, bei welchen ein Ausdruck größer ist, als der andere, die sogenannten Ungleichheiten behandelt werden. Dabei kann das Axiom leiten: Ungleiches auf gleiche Weise verändert, gibt wieder Ungleiches, und zwar in der Art, daß bei dem gegebenen größern Ausdrucke auch ein größeres Resultat zum Vorschein kommt. Ist z. B. $am + b > c$, so wird auch $am > c - b$ und $a > \frac{c-b}{m}$ seyn. Nicht so allgemein kann aber die Beschaffenheit des Resultates bestimmt werden, wenn Gleiches oder Ungleiches auf ungleiche Art verändert wird. Vgl. §. 26 und §. 40. VI.

Anmerkung 2. Die transcendente Gleichung $a^x = b$ kann allgemein nur durch Logarithmen aufgelöset werden. Sind a und b bestimmte Zahlen, so kann zwar x mittelst der Kettenbrüche gefunden werden; allein doch nur durch eine weit langwierigere Rechnung, als durch Hülfe der Logarithmen.

§. 142.

In welcher Ordnung bei etwas verwickelteren Gleichungen die angegebenen Umformungen vorgenommen werden, ist zwar an und für sich gleichgültig; doch wird bei vielen Gleichungen schon durch deren Beschaffenheit eine bestimmte Ordnung angedeutet. Uebung ist auch hierin die beste Lehrmeisterin. — Die Probe wird dadurch gemacht, daß man den Werth von x in die gegebene Gleichung substituirt. Ist die Auflösung richtig, so stellen sich nach der Reduktion die beiden Seiten der Gleichung auch als gleich dar. Hier folgen einige Beispiele.

1) $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}x - 20 = 36 + \frac{2}{3}x$

$\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}x = 56$

$\frac{9x + 6x - 8x}{12} = 56$

$\frac{7}{12}x = 56$

$\frac{1}{12}x = 8$

$x = 96.$

Probe:

$\frac{3}{4}\cdot 96 + \frac{1}{2}\cdot 96 - 20 = 36 + \frac{2}{3}\cdot 96$

$72 + 48 - 20 = 36 + 64$

$100 = 100$

2) $\frac{3}{2x-4} = \frac{5}{3x+4}$

$9x + 12 = 10x - 20$

$32 = x$

Probe: $\frac{3}{2.32-4} = \frac{5}{3.32+4}$

$\frac{3}{60} = \frac{5}{100}$

$\frac{1}{20} = \frac{1}{20}.$

3) $(x+2)(x-\frac{3}{4}) = x(x+\frac{1}{2})$

$x^2 + 2x - \frac{3}{4}x - \frac{3}{2} = x^2 + \frac{1}{2}x$

$2x - \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}x = \frac{3}{2}$

$8x - 3x - 2x = 6$

$3x = 6$

$x = 2$

Probe:

$(2+2)(2-\frac{3}{4}) = (2+\frac{1}{2})$

$4\cdot\frac{5}{4} = 2\cdot\frac{5}{2}$

$5 = 5$

4) $a\left(\frac{x}{b} - c\right) + b = c(x+a)$

$\frac{ax}{b} - ac + b = cx + ac$

$\frac{ax}{b} - cx = 2ac - b$

$ax - bcx = 2abc - b^2$

$x(a - bc) = b(2ac - b)$

$x = \frac{b(2ac-b)}{a-bc}.$

Probe:

$$a\left(\frac{b.\left(\frac{2ac-b}{a-bc}\right)}{b}-c\right)+b=c\left(b\left(\frac{2ac-b}{a-bc}\right)+a\right)$$

$$a\left(\frac{2ac-b-ac+bc^2}{a-bc}\right)+b=c\left(\frac{2abc-b^2+a^2-abc}{a-bc}\right)$$

$$\frac{2a^2c-ab-a^2c+abc^2+ab-b^2c}{a-bc}=\frac{2abc^2-b^2c+a^2c-abc^2}{a-bc}$$

$$\frac{a^2c+abc^2-b^2c}{a-bc}=\frac{abc^2-b^2c+a^2c}{a-bc}.$$

§. 143.

Hat man ein mathematisches Problem aus der gemeinen bürgerlichen in die algebraische Sprache überzutragen, und daraus eine Gleichung zu formiren, so kommt alles darauf an, daß man zuerst alle Umstände und Bedingnisse der Angabe wohl erwäge, und nach denselben die unbekannte Größe verändere und modifizire, so daß ein doppelter Ausdruck von einer und der nämlichen Größe zum Vorschein komme. — Man kann sich die Formation der Gleichungen dadurch erleichtern, daß man die unbekannte Zahl als schon bekannt ansieht, und mit einer willkührlich angenommenen Zahl gleichsam die Probe zu machen sucht; denn dadurch wird man genöthiget, alle Bedingungen des Problemes um so fleißiger zu überdenken. — Wenn sich nun die angenommene Zahl als falsch bewährt, so substituirt man dafür die allgemeine Größe x, und nimmt damit die nämliche Behandlung vor, wie vorhin mit dem Numerus falsus. Vgl. I. Th. §. 109.

Man habe das Problem: der Vater einer Familie zählt gegenwärtig 61, sein jüngster Sohn 13 Jahre. Wie lange wird es hergehen, bis der Vater gerade dreimal so alt wird, als der Sohn?

Wir nehmen an, es gehe noch 6 Jahre her. Da nun nach sechs Jahren sowohl der Vater als der Sohn um eben so viele Jahre älter wird, so muß, wenn man zu den gegenwärtigen Lebensjahren beider 6 addirt, das Alter des Sohnes dem dritten Theile von dem Alter des Vaters gleichen:

$$\frac{61+6}{3} = 13+6$$

$$\frac{67}{3} = 19, \text{ was unrichtig ist.}$$

Nun substituire man anstatt 6 die Größe x.

$$\frac{61+x}{3} = 13+x$$
$$61+x = 39+3x$$
$$61-39 = 2x$$
$$\frac{22}{2} = x$$
$$11 = x.$$

Also 11 Jahre wird es hergehen, bis das Alter des Vaters das Dreifache von dem Alter des Sohnes beträgt.

Probe. $\frac{61+11}{3} = 13+11$

$$\frac{72}{3} = 24$$
$$72 = 24.3.$$

1°. Anmerkung. Bei einigen Problemen muß man eine etwas längere Vorbereitung vorausschicken, ehe eine wahre Gleichung formirt werden kann. Man habe z. B. das Problem: „Ein Spieler vermehrte am ersten Tisch sein Geld um die Hälfte und noch 1 Gulden. Am zweiten Tische das Ganze wieder um die Hälfte und 2 Gulden. Am dritten Tische wieder um die Hälfte und 3 Gulden; und nun sah er sich viermal so reich, als bei dem Anfange des Spieles (am ersten Tische)." Wie viel hatte er zuerst Geld gehabt? — Und wieviel an jedem Tische gewonnen?

Auflösung. Der Spieler hatte, als er zu spielen anfing, x Gulden, damit gewann er am ersten Tische $\frac{x}{2}+1$; folglich hatte er $x+\frac{x}{2}+1 = \frac{3x+2}{2}$.

Am zweiten Tische vermehrte er das Ganze wieder um die Hälfte und 2 Gulden, d. i. um $\frac{3x+2}{4}+2$; folglich hatte er:

$$\frac{3x+2}{2}+\frac{3x+2}{4}+2 = \frac{6x+4+3x+2+8}{4} = \frac{9x+14}{4}.$$

Mit diesem Gelde begab er sich zum dritten Tische, und vermehrte es wieder um die Hälfte und 3 Gulden, d. i. um $\frac{9x+14}{8}+3$.. folglich der ganze Gewinn nebst der Auslage:

$$\frac{9x+14}{4}+\frac{9x+14}{8}+3=\frac{18x+28+9x+14+24}{8}=\frac{27x+66}{8}$$

Da nun dieses nach der Angabe das Vierfache des Geldes seyn soll, das der Spieler am Anfange hatte, so wird die Gleichung formirt $\frac{27x+66}{8}=4x$.

Operation. $27x+66=32x$.

$66=5x$.

$13\frac{1}{3}$ fl. $=x$.

Also fing er mit 13 Gulden 12 Kreuzer zu spielen an.

Probe.

Erstes Spiel.	13 fl.	12 kr.
	+ 6	36
	+ 1	
	20 fl.	48 kr.
Zweites Spiel.	20 fl.	48 kr.
	+ 10	24
	+ 2	
	33 fl.	12 kr.
Drittes Spiel.	33 fl.	12 kr.
	16	36
	3	
	52 fl.	48 kr.

Nun sind 52 Gulden 48 Kreuzer wirklich das Vierfache von 13 Gulden 12 Kreuzer.

2°. Anmerkung. Manchmal scheint ein Problem zwei unbekannte Größen zu enthalten, da in der That nur eine unbekannt ist, indem sich die andere leicht aus der ersten bestimmen läßt, wenn man diese einmal gefunden hat. — Man habe z. B. das Problem: „In einer Börse befinden sich 100 Stücke, theils Konventions-, theils Kronthaler, welche zusammen 246 Gulden betragen. Wie viele sind es von jeder Sorte?“

Auflösung. Es seyen x Konventionsthaler, folglich 100 — x Kronthaler. Um eine Gleichung zu formiren, muß ich erst die Konventions- und Laubthaler auf Gulden reduziren, damit auf beiden Seiten der Gleichung der Ausdruck Gulden erscheine.

$$x \text{ Konventionsthaler} = x \times \frac{12}{5} \text{ fl.} = \frac{12x}{5}.$$

$$(100-x) \text{ Kronthaler} = (100-x) \times \frac{27}{10} \text{ fl.} = \frac{2700-27x}{10}.$$

Die Summe beider = 246 Gulden;

folglich $\frac{12}{5}x + \frac{2700-27x}{10} = 246;$

auf gleichen Nenner gebracht: $\frac{24x+2700-27x}{10} = 246;$

abgekürzt: $24x + 2700 - 27x = 2460;$

$$240 = 3x;$$

$$80 = x;$$

also $x = 80$ Konventionsthaler,

folglich $100 - x = 100 - 80 = 20$ Kronthaler.

Probe. 80 Konv.Thlr. + 20 Kronthaler. = 100 Stücke.

80 Konv.Thlr. $= 80 \times \frac{12}{5} = 192$ fl.

20 Kronthlr. $= 20 \times \frac{27}{10} = 54$ fl.

Summe 246 fl.

§. 144.

Probleme mit einer unbekannten Größe.

I. Es wurden 15 Pfund Kaffee und 18 Pfund Zucker um 22 fl. 48 kr. gekauft. Das Pfund Zucker kostete aber 12 Kreuzer weniger, als das Pfund Kaffee. — Welches war nun der Preis eines Pfundes jeder Sorte?

Auflösung. Der Preis des Kaffee sey x,

folglich des Zuckers $x - \frac{1}{5}$ fl.

15 Pfund Kaffee kosten $15x$,

18 Pfund Zucker $(x - \frac{1}{5})\ 18 = 18x - \frac{18}{5}$.

Aequat. $15x+18x-\frac{18}{5}=22\frac{4}{5}=\frac{114}{5}$

$$15x+18x=\frac{114}{5}+\frac{18}{5}$$

$$33x=\frac{132}{5}$$

$$11x=\frac{44}{5}$$

$x=\frac{4}{5}$ fl. = 48 kr., so viel kostete 1 ℔ Kaffee;

folglich 1 Pfund Zucker 36 kr.

Die Probe zur Selbstübung!

II. Ein Vater hinterläßt seinen drei Söhnen ein Erbe von 3000 Gulden, welches sie so unter sich theilen sollen, daß der Zweite weniger 100 fl. noch so viel, als der Erste; der Dritte weniger 200 fl. noch so viel, als der Zweite erhalte. Wie muß die Theilung nach dem Willen des Vaters vor sich gehen?

Auflösung.

Antheil des I. = x fl.
" " " II. = 2x — 100,
" " " III. = 4x — 400.

Aequat. 7x — 500 = 3000,
7x = 3500,
x = 500 fl.

Probe. Antheil des I. = 500 fl.
" " " II. = 900 "
" " " III. = 1600 "
Summe = 3000 fl.

III. Der Dom zu Regensburg wurde im Jahre 1275, und die steinerne Brücke daselbst im Jahre 1135 zu bauen angefangen. — Wann wird die Brücke gerade zweimal so alt, als der Dom?

Auflösung.

Man bestimme das gegenwärtige Alter sowohl des Domes, als der Brücke (im heuerigen Jahre 1832).

1832 − 1275 = 557 Jahr	Gegenwärtiges Alter des Domes.	1832 − 1135 = 697	Gegenwärtiges Alter der Brücke.

Die Brücke werde in x Jahren zweimal so alt, als der Dom, dann ist jene 557 + x, diese 697 + x Jahre alt. Also

$$\text{Aequat.} \quad 557x + x = \frac{697 + x}{2}$$

$$1114 + 2x = 697 + x$$

$$x = -417.$$

Dieser negative Werth von x drückt aus, daß die Antwort im entgegengesetzten Sinne der Frage gegeben werden müsse, daß nämlich der Zeitpunkt, in welchem das Alter der Brücke gleich dem doppelten Alter des Domes, nicht in die Zukunft, sondern in die Vergangenheit falle.

Also vor 417 Jahren war die Brücke eben zweimal so alt als der Dom; denn jene zählte damals $697 - 417 = 280$, dieser 140 Jahre; aber $\frac{280}{2} = 140$.

IV. Es soll eine Summe Geldes unter eine Anzahl Armer vertheilt werden. Wollte man nun jeder Person 4 Gulden reichen, so wären 32 Gulden zu viel; gäbe man aber jeder Person 4 Gulden 30 Kreuzer, so wären 51 Gulden 30 Kreuzer zu wenig. — Wie viel sind es nun Arme? — Wie viel beträgt das zu vertheilende Geld?

Auflösung. Die Zahl der Armen $= x$, folglich beträgt die Summe Geldes einmal $4x + 32$ fl.,

das andere Mal $4\frac{1}{2}x - 51\frac{1}{2}$ fl. $= \frac{9x - 103}{2}$ fl.

$$\text{Aequat.} \quad 4x + 32 = \frac{9x - 103}{2}$$

$$8x + 64 = 9x - 103$$

$$-(8x + 103 = 8x + 103)$$

$$167 = x;$$

also 167 Arme, und das zu vertheilende Geld

$$\left.\begin{array}{l} \text{entweder } (167 \times 4) + 32 \text{ fl.} \\ \text{oder } (167 \times \frac{2}{2}) - 51\frac{1}{2} \text{ fl.} \end{array}\right\} = 700 \text{ fl.}$$

V. In drei unglücklichen Jahren verlor ein Schäfer beinahe seine ganze Heerde; denn im ersten Jahre raffte die Seuche die Hälfte der Schafe und 1; im zweiten wieder die Hälfte des Restes und 2; im dritten wieder die Hälfte des Restes und 3

hinweg. — Wie viele waren es anfänglich gewesen, da er nur noch den fünf und zwanzigsten Theil der ganzen Heerde besitzt?

Auflösung. Die Anzahl aller Schafe $= x$.

Verlust des 1sten Jahres $\frac{1}{2}x + 1 = \frac{x+2}{2}$. Erster Rest $\frac{x-2}{2}$.

" " " 2ten " $\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{2}\right)+2 = \frac{x+6}{4}$. Zweiter Rest $\frac{x-10}{4}$.

" " " 3ten " " $\frac{x-10}{8}+3 = \frac{x+14}{8}$.

Bringt man nun diese Verluste auf gleichen Nenner, und addirt sie, so erhält man die Summe

$$\frac{4x+8+2x+12+x+14}{8} = \frac{7x+34}{8}.$$

Dieses beträgt die ganze Heerde, weniger den 25sten Theil.

Also Aequation: $\frac{7x+34}{8} = x - \frac{x}{25}$

$$\frac{7x+34}{8} = \frac{24x}{25}$$

$$175x + 850 = 192x$$

$$850 = 17x$$

$$50 = x.$$

Es waren also 50 Schafe.

Probe.

Erstes Jahr. Verlust $\frac{50}{2} + 1 = 26$. Rest 24.

Zweites " " $\frac{24}{2} + 2 = 14$. Rest 10.

Drittes " " $\frac{10}{2} + 3 = 8$. Rest 2.

Es betrug also der ganze Verlust 48 Schafe. — Die noch übrigen zwei betragen den 25sten Theil vom Ganzen; denn $\frac{50}{25} = 2$.

VI. Ein Courier A, welcher täglich a Meilen macht, geht m Tage früher ab, als ein Courier B, welcher täglich b Meilen macht, von einem Orte abgeht, der c Meilen vom Orte des A rückwärts entfernt liegt. Beide gehen nach der nämlichen Richtung. Wo und wann wird A von B eingeholt, vorausgesetzt, daß $b > a$ ist?

Auflösung. A mache, bis er eingeholt wird, x Meilen, so legt bis dahin B $x+c$ Meilen zurück. Da A im Ganzen x, an einem Tage aber a Meilen macht, so ist die Anzahl der dazu nöthigen Tage $= \frac{x}{a}$; in gleicher Art ist die Zeit des B $= \frac{x+c}{b}$ Tage. B ist aber um m Tage weniger auf dem Wege, als A; daher

Aequat. $$\frac{x}{a} = \frac{x+c}{b} + m$$
$$bx = ax + ac + abm$$
$$x(b-a) = a(c+bm)$$
$$x = \frac{a(c+bm)}{b-a}, \text{ der Weg des A.}$$

Die Zeit des A ist $= \frac{x}{a}$, also $= \frac{c+bm}{b-a}$.

Der Weg des B ist $= x+c = \frac{a(c+bm)}{b-a} + c = \frac{b(c+ma)}{b-a}$;

Die Zeit des B ist $= \frac{x+c}{b} = \frac{c+ma}{b-a}$.

Gehen A und B von dem nämlichen Orte aus, so ist $c = 0$

Der Weg des A $= \frac{abm}{b-a}$, die Zeit des A $= \frac{bm}{b-a}$,

" " " B $= \frac{abm}{b-a}$, " " " B $= \frac{am}{b-a}$.

Dieß ist die Formel der s. g. Ambulationsrechnung.

Gehen A und B einander entgegen, so ist der Weg des B $= c-x$; also $\frac{x}{a} = \frac{c-x}{b} + m$, woraus $x = \frac{a(c+mb)}{b+a}$. Das nämliche Resultat erhält man aus obigem $x = \frac{a(c+mb)}{b-a}$, wenn man a negativ setzt; nur wird dadurch auch x negativ. Dieses ist aber nothwendig, da nun x einen der in obiger Aufgabe angenommenen Richtung entgegengesetzter Weg ausdrückt.

Man löse nach dieser allgemeinen Auflösung die Aufgabe: Wo wird zwischen 6 und 7 Uhr der Minutenzeiger den Stundenzeiger decken?

Auflösung. Wenn der Stundenzeiger auf 6 Uhr ist, steht der Minutenzeiger auf 12 Uhr; also ist, wenn eine der, eine Stunde ausmachenden, fünf Abtheilungen (Uhrminuten) als Einheit zu Grunde gelegt wird, $c = 6.5 = 30$. Während der Stundenzeiger fünf solcher Minuten zurücklegt, macht der Minutenzeiger $12.5 = 60$, also $a = 5$, $b = 60$. Beide gehen zu gleicher Zeit von dem angegebenen Orte aus, mithin $m = 0$. Daher

$$x = \frac{a(c+mb)}{b-a} = \frac{5(30+0)}{60-5} = \frac{5}{55} \cdot 30 = \frac{1}{11} \cdot 30 = 2\frac{8}{11}.$$

Es wird der Minutenzeiger auf der $2\frac{8}{11}$ten Uhrminute zwischen 6 und 7 Uhr, d. i., wenn es $2\frac{8}{11}$ Minuten über $6\frac{1}{2}$ Uhr ist, den Stundenzeiger decken.

Anmerkung. Bei Aufgaben letzterer Art kann sich nur der eine Faktor von c ändern. Daher ist durch diese Lösung zugleich jede andere ähnliche Aufgabe gelöset. So wird z. B. zwischen 7 und 8 Uhr $x = \frac{1}{11} . 7.5$; zwischen 8 und 9 Uhr $x = \frac{1}{11} . 8.5$ u. s. w.

VII. Ein Gastgeber machte aus zweierlei Weinen, zu 2 Gulden und 1 Gulden 30 Kreuzer die Maß, ein Gemische von 2 Eimern, so daß die Maß des gemischten Weines auf 1 Gulden 49 Kreuzer 1 Pfennig zu stehen kam. Wie viel hatte er von jeder Weinsorte in die Mischung genommen?

1) Bestimmte Auflösung. Von der bessern Sorte x Maß, folglich von der schlechtern $120 - x$ Maß.

x Maß, à 2 fl., kosten $2x$ fl.

$(120-x)$ Maß, à $1\frac{1}{2}$ fl., $= (120-x)\frac{3}{2} = \frac{360-3x}{2}$ fl.

1 fl. 49 kr. 1 Pf. $= 109\frac{1}{4}$ kr. $= \frac{437}{240}$ fl.

Aequation: $2x + \frac{360-3x}{2} = \frac{437}{240} \times 120$

$$2x + \frac{360-3x}{2} = \frac{437}{2}$$

$$4x + 360 - 3x = 437$$

$$x = 437 - 360$$

$$x = 77 \text{ Maß.}$$

Also 77 Maß des bessern, und (120—77, d. i.) 43 Maß des schlechtern Weines kamen in die Mischung. — Die Probe zur Uebung!

2) Allgemeine Auflösung. Man setze allgemein den Werth von einer Einheit des bessern in die Mischung kommenden Ingrediens = a, des geringern = b, der Mischung = c; die Anzahl der im Mischungsquantum liegenden Einheiten der nämlichen Art = q; die Anzahl der Einheiten vom bessern Ingrediens = x: so wird die Anzahl der Einheiten vom geringern = q − x; der Werth vom bessern Ingrediens = ax, vom geringeren = b(q − x), von der ganzen Mischung = cq. Daher

$$ax + b(q-x) = cq$$
$$ax - bx = cq - bq$$
$$x(a-b) = q(c-b)$$
$$x = \frac{c-b}{a-b} \cdot q,$$

die Anzahl der Einheiten vom bessern Ingrediens; die vom geringeren also $= q - x = q - \frac{c-b}{a-b} \cdot q = \frac{a-c}{a-b} \cdot q$. Diese Formel liegt dem mechanischen Verfahren der s. g. Alligationsrechnung (vgl. I. Th. §. 127) zu Grunde. Nämlich

$a = 120$ | $c - b = 19\frac{1}{4}$ | $x = \frac{19\frac{1}{4}}{30} \cdot 120 = 77$

$b = 90$ | $c = 109\frac{1}{4}$ | $a - c = 10\frac{3}{4}$ | $a - b = 30$ | $q - x = \frac{10\frac{3}{4}}{30} \cdot 120 = 43.$

VIII. Wie heißt die Zahl, deren dritter und sechster Theil addirt und durch 4 multiplizirt das Doppelte dieser Zahl gibt?

Auflösung. Diese Zahl heißt x, so ist $\left(\frac{x}{3} + \frac{x}{6}\right)4$

$$= \left(\frac{3x}{6}\right)4 = 2x$$
$$\frac{12x}{6} = 2x$$
$$12x = 12x$$
$$x = x.$$

Dergleichen Gleichungen, worin die unbekannte Zahl beiderseits im nämlichen Ausdrucke erscheint, heißen identische (das Nämliche sagende). Man nehme für x was immer für eine Zahl, so wird sie die Bedingnisse des Problems erfüllen.

IX. Ein Vater wurde einst über das Alter seines Sohnes gefragt. Er antwortete: Vor 5 Jahren war ich dreimal so alt, als mein Sohn; und in 7 Jahren werde ich zweimal so alt seyn, als er. — Wie mußte man sich diese Antwort auslegen?

Auflösung. Vor 5 Jahren zählte der Sohn x, der Vater 3x Jahre. Gegenwärtig zählt jener x+5, dieser 3x+5 Jahre; folglich nach 7 Jahren

$$\frac{3x+5+7}{2} = x+5+7$$

$$\frac{3x+12}{2} = x+12$$

$$3x+12 = 2x+24$$

$$x = 12.$$

Also war vor 5 Jahren der Sohn 12, der Vater 36 Jahre alt. Gegenwärtig zählt jener 17, dieser 41 Jahre. Nach 7 Jahren wird der Vater 48, der Sohn 24 Jahre alt; aber $\frac{48}{2} = 24$.

X. Es wurde ein Kapital sammt seinen sechsjährigen Interessen zu $3\frac{2}{3}$ fl. Prozent, in Allem 5490 fl. heimbezahlt. — Welches war das Kapital? welches die Interessen? —

Auflösung. Es sey das Kapital = x.

Kapital und Interessen (5490) = S.

Das Prozent ($3\frac{2}{3}$) = p.

Die Auslagezeit (6) = a,

und 100 = c.

Nun die Interessen von x Kapital zu p Prozent in a Jahren gesucht!

Z. fl.?	x Kap.
Kap. c.	a Jahr
Jahr 1	p fl. Inter.

$$? = \frac{apx}{c}.$$

Folglich $x + \frac{apx}{c} = S.$

$$cx + apx = cS.$$

$$x(c+ap) = cS.$$

$$x = \frac{cS}{c+ap}.$$

Nun

Nun substituirt

$$x = \frac{100 \times 5490}{100 + (6 \times \frac{1}{3}\frac{1}{1})} = \frac{549000}{122} = 4500 \text{ fl. Kapital.}$$

Davon sind die 6jährigen, $3\frac{2}{5}$ prozent. Zinsen

$$\frac{6 \times 11 \times 45}{5} = 2 \,.\, 11 \,.\, 45 = 2 \,.\, 495 = 990.$$

Aber $4500 + 990 = 5490$ fl.

Es kann die Aufgabe auch so gestellt werden:

Das Kapital S soll nach a Jahren bezahlt werden, ohne daß während dieser Zeit eine Zinszahlung Statt findet; der Gläubiger wünscht aber sogleich bezahlt zu werden: wieviel kann er billiger Weise fordern, wenn er, wie der Schuldner, während der Zeit mit jenem Kapitale p Prozent gewinnen kann?

Oder: Was ist der baare Werth eines nach a Jahren fälligen Kapitals S, zu p Prozent gerechnet?

Wird die Aufgabe so gestellt, so heißt sie Diskonto- oder Rabattrechnung; $x = S \,.\, \frac{c}{c + ap}$ drückt den baaren Werth des Kapitals; $S - x = S - \frac{Sc}{c+ap} = \frac{Sc - Sc + S \,.\, ap}{c + ap} = \frac{S \,.\, ap}{c+ap}$ das Diskonto mit einfachem Zinse, d. i. jene Summe aus, welche der Schuldner von dem eigentlich zu bezahlenden Kapitale dafür abziehen darf, daß er den ihm, etwa in Folge eines Testamentes ꝛc., gebührenden Zinsgenuß aufgibt, indem er das Kapital, statt nach a Jahren, sogleich zurückbezahlt.

Z. B. Ein Erblasser verordnet, daß der Erbe A dem Legatar B nach 6 Jahren 4000 fl. bezahlen solle, während dieser Zeit aber das Kapital für sich benützen dürfe. Der Legatar wünscht aber das Legat sogleich zu erhalten; wieviel kann er nach dem landesüblichen Zinsfuße billiger Weise verlangen?

Hier ist $S = 4000$, $p = 5$, $n = 6$, $c = 100$, mithin

$$x = 4000 \,.\, \frac{100}{100 + 30} = 4000 \,.\, \frac{10}{13} = 3076 \text{ fl. } 55 \text{ kr. } 1\tfrac{1}{2} \text{ Pf. beinahe;}$$

Diskonto: 4000 fl. — (3076 fl. 55 kr. $1\frac{1}{2}$ Pf.) = 923 fl. 4 kr. $2\frac{1}{2}$ Pf.

Nach dieser Formel kann eine Diskonto-Aufgabe auch berechnet werden, wenn das Kapital S während der bestimmten

Zeit zu geringern Prozenten verzinset, und zu höhern diskontirt werden soll. Nur muß man zuerst die Zinsen berechnen, welche das Kapital bis zur Verfallzeit tragen würde, und dann die ganze Summe, d. i. Kapital und Zinsen, nach jener Formel diskontiren.

Z. B. Es liegen 5000 auf 2 prozentige Zinsen; die eine Hälfte des Kapitals ist nach 2, die andere nach 5 Jahren zahlbar. Welches ist der baare Werth des ganzen Kapitals gegen 5 Prozent Diskonto?

Operation.

I. Hälfte = 2500 fl.	II. Hälfte = 2500 fl.
Zins von 2 Jahren $= \frac{2500.2.2}{100}$ fl. $= 100$ fl.	Zins von 5 Jahren $= \frac{2500.2.5}{100} = 250$ fl.
Kapital und Zins $= 2600$ fl.	Kapital und Zins $= 2750$ fl.
$x = 2600 . \frac{100}{100+2.5} = 2363\frac{7}{11}$ fl.	$x = 2750 . \frac{100}{100+5.5} = 2200$ fl.

Der baare Werth des ganzen Kapitals ist also 4563 fl. 38 kr.
Das Diskonto 5000 fl. — (4563 fl. 38 kr.) = 436 fl. 22 kr.

Anmerkung. Wird das Diskonto nach Zinszinsen berechnet, so heißt es Interusurium. Darüber siehe unten §. 276.

XI. Eine bestimmte Quantität von Brettern liefert die Schneidemühle A in 8 Tagen, die Mühle B in 10 Tagen, die Mühle C in 20 Tagen. — Innerhalb welcher Zeit werden die 3 Mühlen mit einander die nämliche Quantität abliefern können?

Auflösung. In x Tagen.

Allgemein sey die Zeit von A = a,
von B = b,
von C = c,
jene bestimmte Quantität von Brettern = q.

Nun suche man die innerhalb der Zeit x von jeder Mühle zu liefernde Quantität.

A) $\frac{\begin{array}{c|c} ? & x \text{ Tage} \\ a & q \end{array}}{\frac{qx}{a}}$.

B) $\frac{\begin{array}{c|c} ? & x \\ b & q \end{array}}{\frac{qx}{b}}$,

C) $\frac{\begin{array}{c|c} ? & x \\ c & q \end{array}}{\frac{qx}{c}}$.

Also $\frac{qx}{a} + \frac{qx}{b} + \frac{qx}{c} = q.$

$$\frac{bcx + acx + abx}{abc} = 1.$$

$$x(bc + ac + ab) = abc.$$

$$x = \frac{abc}{bc + ac + ab}$$

Nun substituirt

$$x = \frac{8 \cdot 10 \cdot 20}{200 + 160 + 80} = \frac{1600}{440} = 3\frac{7}{11} \text{ Tage.}$$

* Die Beschaffenheit der Arbeit ist bei solchen Aufgaben ohne Einfluß, da q aus allen Gliedern hinweggefallen ist.

XII. Einige Kaufleute theilten den gemeinschaftlich erobert-ten Gewinn auf folgende Weise: der Erste nahm 100 fl. und vom Reste den siebenten Theil; der zweite 200 fl. und vom Reste den siebenten Theil; und so fort, jeder von den übrigen um 100 fl. mehr, als der vorhergehende, und vom Reste den siebenten Theil. Am Ende fand sich, daß jeder gleich viel erhalten hatte.

Welches war der vertheilte Gewinn? — Wie viel waren es Kaufleute? — Und wie viel erhielt ein jeder?

Auflösung. Der gemeinschaftliche Gewinn $= x$ fl.

Antheil des Ersten. $100 + \frac{x - 100}{7} = \frac{600 + x}{7}$

folglich Rest $x - \frac{600 + x}{7} = \frac{6x - 600}{7}.$

Antheil des Zweiten. $200 + \frac{\frac{6x - 600}{7} - 200}{7}$

$$= \frac{9800 + 6x - 600 - 1400}{49} = \frac{7800 + 6x}{49}.$$

Da nun der Antheil beider gleich groß ist, so hat man die Aequation:

$$\frac{600 + x}{7} = \frac{7800 + 6x}{49}$$

$$4200 + 7x = 7800 + 6x$$

$$x = 3600.$$

Also war der zu vertheilende Gewinn 3600 fl.

Der Erste erhielt $100 + \frac{3500}{7} = 600$ fl.

— Zweite — $200 + \frac{2800}{7} = 600$ fl.

— Dritte — $300 + \frac{2100}{7} = 600$ fl.

— Vierte — $400 + \frac{1400}{7} = 600$ fl.

— Fünfte — $500 + \frac{700}{7} = 600$ fl.

— Sechste — $600 + \frac{0}{7} = 600$ fl.

Und es waren 6 Kaufleute; denn $\frac{3600}{600} = 6$.

XIII. Von zwei Nachbarn lieh der Erste (A) 4000 fl. zu 4 Prozent; der andere aber, wiewohl drei Jahre später, 5000 fl. zu 5 Prozent aus. — Wie lange wird es hergehen, bis der Nachbar B eben so viel Zins zieht, als Nachbar A?

Auflösung. Es währe x Jahre. Nun wird durch die Proportion bestimmt, wie viel Zins beide Kapitale innerhalb dieser Zeit abwerfen.

Z.	?	4000 fl.
		x + 3 J.
100		
1		4

$? = 160x + 480.$

Z.	?	5000 Kr.
		x J.
100		5

$? = 250\,x.$

Aequation. $160x + 480 = 250\,x$

$-160x \qquad -160x$

$480 = 90\,x.$

$x = 5\frac{1}{3}$ Jahr.

Anmerkung. Da der Erste (A) schon um 3 Jahre früher sein Kapital ausgeliehen hat, so ist seine Auslagzeit $x + 3 = 8\frac{1}{3}$.

Probe.

Z. fl.	?	4000 fl. K.
K.	100	$8\frac{1}{3}$ J.
J.	1	4 fl. Z.
	3	25

$? = \frac{4000}{3} = 1333\frac{1}{3}$ fl.

Z. fl.	?	5000 fl. K.
K.	100	$5\frac{1}{3}$ J.
J.	1	5 fl. Z.
	3	16

$? = \frac{4000}{3} = 1333\frac{1}{3}$ fl.

XIV. Ein Vater hatte mit seinen zwei Söhnen folgenden Vertrag geschlossen. Für jeden Tag, den ihr mit Studiren zubringet, zahle ich jedem von euch 12 kr.; für jeden Tag des Müßigganges hingegen zahlt ihr mir, ein jeder 15 kr.

Nach Verlauf eines Jahres wurde Abrechnung gehalten. Da fand sich denn, daß der Vater dem Jüngern 1 Gulden, und der Aeltere dem Vater 8 Gulden schuldig war. — Wie lange war jeder der beiden Söhne fleißig, wie lange müßig gewesen?

Auflösung. Diese Aufgabe enthält zwei Aequationen.

1) Für den ersten Sohn .. x Tage des Fleißes
(365 — x) Tage des Müßigganges.

12 kr. = $\frac{1}{5}$ fl. 15 kr. = $\frac{1}{4}$ fl.

$$(365 - x)\,\tfrac{1}{4} + 1 = \frac{x}{5}$$

$$\frac{365 - x}{4} + 1 = \frac{x}{5}$$

$$20 \times 1825 - 5x + 20 = 4x$$

$$1825 = 9x$$

$$205 = x \text{ Tage des Fleißes,}$$

$$365 - 205 = 160 \text{ Tage des Müßigganges.}$$

Probe. $205 \times \frac{1}{5} = 41$ fl.

$160 \times \frac{1}{4} = 40$ fl.

2) Für den zweiten Sohn.

$$\frac{365 - x}{4} - 8 = \frac{x}{5}$$

$$20 \times 1825 - 5x - 160 = 4x$$

$$1665 = 9x$$

$$185 = x \text{ Tage des Fleißes,}$$

$$365 - 185 = 180 \text{ Tage des Müßigganges.}$$

Probe. $185 \times \frac{1}{5} = 37$ fl.

$180 \times \frac{1}{4} = 45$ fl.

XV. Welches ist die Zahl, deren Fünffaches so viel über 20 beträgt, als sie selbst unter 20 steht?

Auflösung. Sie heiße x.

$$5x - 20 = 20 - x$$

$$6x = 40$$

$$x = 6\tfrac{2}{3}.$$

XVI. Das Kapital a ist in m Jahren, das Kapital b in n, c in r Jahren fällig. Wann kann ohne Nachtheil des Gläubigers und Schuldners die ganze Summe auf einmal bezahlt werden, die Zinsen bei allen zu p Prozent gerechnet?

Diese Aufgabe der Terminrechnung ist identisch mit der: In wie vielen Jahren trägt die Summe der Kapitalien a, b, c zu p Prozent eben so viel Zinsen, als die Kapitalien einzeln in den bestimmten Zeiten dem Schuldner getragen haben würden?

Auflösung. Das Kapital a trägt in 1 Jahr $a.\frac{p}{100}$, also in m Jahren $am.\frac{p}{100}$ fl. Zinsen; das Kapital b in n Jahren $bn.\frac{p}{100}$; c in r Jahren $cr.\frac{p}{100}$; das Kapital $a+b+c$ in x Jahren $(a+b+c)x.\frac{p}{100}$. Daher

$$am.\frac{p}{100}+bn.\frac{p}{100}+cr.\frac{p}{100}=(a+b+c).x\frac{p}{100}.$$

Wenn der Zinsfuß durchaus gleich ist, fällt der Faktor $\frac{p}{100}$ bei jedem Gliede hinweg, und es ist

$$x=\frac{am+bn+cr}{a+b+c}$$

Beispiele.

1) A ist dem B nach 3 Monaten 1000 fl., nach 5 Monaten 800 fl., nach 10 Monaten 1200 fl. zu zahlen schuldig. Wann kann B die ganze Summe auf einmal fordern?

$$x=\frac{1000.3+800.5+1200.10}{1000+800+1200}=6\tfrac{1}{2}\text{ Monate.}$$

2) Eine Summe von 1600 fl. ist auf Termine zahlbar, und zwar 400 fl. nach 1, 500 fl. nach 2, der Rest von 700 fl. nach 4 Jahren. Es wurden aber schon nach dem ersten halben Jahre 900 fl. erlegt. Wann muß der Rest auf einmal bezahlt werden?

Auflösung. Indem der Schuldner die ganze Summe ein halbes Jahr unverzinslich besessen hat, so ist:

$$1600.\tfrac{1}{2}+700x=400.1+500.2+700.4$$
$$x=5\tfrac{4}{7}\text{ Jahre}=5\text{ Jahre }208\text{ Tage.}$$

3) A soll dem B 6000 fl. baar bezahlen, wünscht aber diese Schuld in drei gleichen Termingeldern abzutragen, nämlich in 1, 2, 3 Jahren. Wieviel beträgt jedes Termingeld, zu 5 pct. gerechnet?

$$6000+6000.3.\frac{5}{100}=\left(x+x.1.\frac{5}{100}\right)+\left(x+x.2.\frac{5}{100}\right)+x.$$

4) Jemand soll ein Kapital nach 1 Jahre bezahlen; wünscht aber einen Theil davon 6 Monate länger zu besitzen, und will daher 1000 fl. baar bezahlen. Was beträgt der Rest, wenn 5 pct. Zins gerechnet werden?

$$(1000+x)\,12.\frac{5}{100}=x(12+6).\frac{5}{100}.$$

* Bei diesen Terminrechnungen wurden einfache Zinsen vorausgesetzt; über Terminrechnung mit Zinszinsen siehe unten §. 278.

Zweiter Artikel.

Einfache Gleichungen mit mehrern unbekannten Größen.

§. 145.

Wenn mehrere Größen unbekannt sind, so müssen auch mehrere Gleichungen, und in der Regel so viele gegeben seyn, als Größen unbekannt sind. Aus einer Gleichung läßt sich nämlich nur die Summe, oder die Differenz, oder das Produkt, oder der Quotient von zwei unbekannten Größen angeben, ohne daß man die beiden Größen selbst weiß. — Man bedient sich aber, um mehrere unbekannte Größen auszudrücken, der Buchstaben u, x, y, z. Z. B.

$x-a=y$	$x=q.y.$
$x-y=a$	$\frac{x}{y}=q.$
$x-b=c-y.$	$x=\frac{p}{y}.$
$x+y=c+b.$	$xy=p.$

Wenn ich aber auch weiß, z. B. daß $x.y=60$ u. s. w., so reicht dieses noch nicht hin, die Werthe von x und y bestimmt anzugeben, indem hier unendlich viele Werthe von x und y in ganzen und gebrochenen, positiven und negativen Zahlen statt

haben können. — Eben so läßt sich aus zwei Gleichungen in der Regel nicht der Werth für drei unbekannte Größen bestimmt finden, und so analogisch bei vier, fünf ꝛc. unbekannten Größen. — Es ist aber die allgemeine Form für solche Gleichungen:

$$ax + by + cz = S \ldots \text{u. s. w.}$$

Anmerkung. Um eine Aufgabe von n unbekannten Größen bestimmt lösen zu können, müssen in der Regel auch n Gleichungen gegeben seyn, und zwar so voneinander verschiedene Gleichungen, daß nicht schon die eine oder die andere in der dritten ganz enthalten ist.

§. 146.

A. Auflösung bestimmter Gleichungen mit zwei unbekannten Größen.

Man hat viererley Wege, solche Gleichungen aufzulösen; nämlich die Substitution, die Komparation, die Elimination und die Methode von Bezout.

I. Die Substitution besteht darin, daß man für die eine unbekannte Größe x oder y aus einer Gleichung einen Werth sucht, und diesen in der andern Gleichung mit den übrigen Größen in der nämlichen Art verbindet, in welcher jene unbekannte Größe damit verbunden gegeben ist.

Z. B. Man habe die Gleichungen:

$$x = 18 + y$$
$$\text{und } 2x + y = 51.$$

Ich kann nun hier entweder 1) einen Werth von x, oder 2) einen Werth von y substituiren, indem sich Gleiches für Gleiches setzen läßt.

1) Substituire ich in der zweiten Gleichung den Werth von x ($x = 18 + y$), so ergibt sich

$$2(18 + y) + y = 51$$
$$36 + 2y + y = 51$$
$$36 + 3y = 51$$
$$3y = 15$$
$$y = 5.$$

Subſtituire ich nun ferner dieſen Werth von y in der erſten Gleichung, ſo erhalte ich auch den Werth von x.

$$x = 18 + 5 = 23.$$

2) Subſtituire ich aber in der zweiten Gleichung lieber den Werth von y, den ich leicht aus der erſten Gleichung herausfinden kann,

$$x = 18 + y$$
$$y = x - 18;$$

ſo erhalte ich:

$$2x + x - 18 = 51$$
$$3x = 69$$
$$x = 23$$

und $y = 23 - 18 = 5.$

II. Die Komparation beſteht darin, daß man aus der Zuſammenſtellung der aus den beiden Gleichungen gefundenen Werthe einer und der nämlichen Unbekannten den Werth der zweiten ſucht. Sie gründet ſich auf das Axiom: Wenn von zwey Größen jede der nämlichen dritten gleich iſt, ſo ſind ſie auch unter ſich gleich.

1 Thlr. = 30 Gr.
1 Thlr. = 90 Kr.

30 Gr. = 90 Kr.
1 Gr. = 3 Kr.

Soll ich die vorhergehende Gleichung durch den Weg der Komparation auflöſen, ſo könnte ich alſo verfahren:

1) Ich mache aus der Gleichung $2x + y = 51$ die Nebengleichung

$$2x = 51 - y$$
$$x = \frac{51 - y}{2}.$$

Nun habe ich zweierlei Werthe von x:

$$x = 18 + y$$
$$x = \frac{51 - y}{2}.$$

Komparirt: $18 + y = \frac{51 - y}{2}$

$$36 + 2y = 51 - y$$
$$3y = 15$$
$$y = 5.$$

Der Werth von x wird durch die Substitution gefunden:

$$x = 18 + 5 = 23$$

$$\text{oder } x = \frac{51 - 5}{2} = \frac{46}{2} = 23.$$

Oder 2) ich suche zwei Werthe von y, indem ich zwei Nebengleichungen bilde und komparire.

$$\begin{aligned} x &= 18 + y \\ 2x + y &= 51 \end{aligned}$$

Nebengleichungen: $\begin{cases} y = x - 18 \\ y = 51 - 2x \end{cases}$

$$\text{kompar. } x - 18 = 51 - 2x$$

$$3x = 69$$

$$x = 23.$$

Nun wird y durch Substitution gefunden:

$$y = 23 - 18 = 5$$

$$\text{oder } y = 51 - 46 = 5.$$

III. Die Elimination (oder richtiger Konjunktion) sucht zwei Gleichungen — durch Addition oder Subtraktion — so mit einander in Verbindung zu bringen, daß dadurch eine unbekannte Größe gänzlich hinweggeschafft wird. Manchmal sind die gegebenen Gleichungen schon von der Art, daß sich die Elimination sogleich bewirken läßt; wenn nämlich die zu eliminirende unbekannte Größe in den beiden Gleichungen mit dem nämlichen Koeffizienten vorkommt. Hat sie auch in beiden gleiche Zeichen, so wird die eine Gleichung von der andern subtrahirt; hat sie verschiedene Zeichen, so werden die Gleichungen addirt. Haben die Gleichungen nicht die bezeichnete Form, so muß man vorher für die zu eliminirende Größe Gleichheit der Koeffizienten dadurch herzustellen suchen, daß man eine oder auch beide Gleichungen mit einer schicklichen Zahl multiplizirt.

Z. B. Für die vorhergehenden Gleichungen läßt sich die Elimination von y geradezu durch Addition bewirken.

$$\begin{aligned} x - y &= 18 \\ 2x + y &= 51 \\ \hline 3x &= 69 \\ x &= 23 \end{aligned}$$

Will man, um den Werth von y zu finden, x eliminiren, so muß die erste Gleichung mit 2, dem Koeffizienten von x' in der

zweiten Gleichung multiplizirt, und dann von der zweiten subtrahirt werden.

$$2x + y = 51$$
$$\times 2 \quad 2x - 2y = 36$$
$$- \quad + \quad -$$
$$3y = 15$$
$$y = 5.$$

IV. Die Auflösungsmethode von Bezout besteht bei zwei Gleichungen mit zwei unbekannten Größen darin, daß man die eine Gleichung mit einer willkührlichen Größe m multiplizirt, und von dieser neuen Gleichung die gegebene zweite abzieht. Setzt man nun den Koeffizienten der zu eliminirenden unbekannten Größe $= 0$, so erhält man einen bestimmten Werth von m, und eine neue Gleichung, welche nur eine Unbekannte enthält. Z. B.

$$ax + by = c \ldots\ldots (A$$
$$a_1x + b_1y = c \ldots\ldots (B$$

Multiplizirt man die Gleichung A mit m, so erhält man

$$amx + bmy = cm \ldots\ldots (C.$$

Subtrahirt man

$$a_1x + b^1y = c_1 \ldots\ldots (B$$
$$- \quad - \quad -$$
$$(am-a_1)x + (bm-b_1)y = cm-c_1 \ldots\ldots (D$$

Da m willkührlich ist, also dafür angenommen werden kann, was man will, so kann man es so annehmen, daß,

1) um x zu eliminiren, $am - a_1 = o$, folglich $m = \frac{a_1}{a}$, woraus

$$o.x + \left(b.\frac{a_1}{a} - b_1\right)y = c.\frac{a_1}{a} - c_1$$
$$(a_1b - ab_1)y = a_1c - ac_1$$
$$y = \frac{a_1c - ac_1}{a_1b - ab_1}$$

2) um y zu eliminiren, $bm - b_1 = o$, folglich $m = \frac{b_1}{b}$, woraus in D substituirt

$$\left(a\frac{b_1}{b} - a_2\right)x = c.\frac{b_1}{b} - c_1$$
$$(ab_1 - a_1b)x = cb_1 - bc_1$$
$$x = \frac{b_1c - bc_1}{ab_1 - a_1b}.$$

Zusatz. Vergleicht man die Werthe von x und y mit einander, so wird sogleich eine gewisse Gleichförmigkeit auffallen. Sie unterscheiden sich nämlich nur darin von einander, daß die Koeffizienten von x und y der Gleichung A unter einander, und eben so der Gleichung B verwechselt sind. Bei der Gleichförmigkeit der beiden Gleichungen ließ sich auch eine ähnliche Gleichförmigkeit der Werthe von x und y erwarten. Diese Bemerkung ist aber um so wichtiger, als alle Gleichungen mit zwei unbekannten Größen auf die Form von A und B gebracht werden können, als man folglich bei allen aus dem Werthe der einen Unbekannten sogleich auf den der andern schließen, oder auch alle solche Gleichungen durch bloße Substitution in die obigen allgemeinen Werthe von x und y auflösen kann.

Es seyen z. B. gegeben die Gleichungen:

$$6x - y = 50 \ldots\ldots (\alpha$$
$$\tfrac{2}{3}x + y = 96 - 3y \ldots\ldots (\beta$$

Bringt man die Gleichung β auf die Form von B:

$$\tfrac{2}{3}x + 4y = 96$$
$$2x + 12y = 288$$
$$x + 6y = 144,$$

so ist $a = 6,\ b = -1,\ c = 30$

$$a_1 = 1,\ b_1 = 6,\ c_1 = 144$$

$$\text{mithin } y = \frac{1.50 - 6.144}{+1.1 - 6.6} = \frac{-50 + 864}{1 + 36} = 22$$

$$x = \frac{6.50 + 1.144}{6.6 + 1.1} = \frac{300 + 144}{37} = 12.$$

§. 147.

B. Auflösung der Gleichungen mit drei und mehrern unbekannten Größen.

Sind drei Gleichungen mit drei Unbekannten gegeben, so sucht man dieselben dadurch, daß man die erste Gleichung mit der zweiten, und die dritte mit der ersten oder zweiten durch Komparation, Substitution oder Elimination verbindet, auf zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten zu bringen. Sollten in einer Gleichung nur zwei Unbekannte vorkommen, so muß aus den

beiden Gleichungen eine neue gebildet werden, in welcher gleichfalls nur zwei, und zwar die nämlichen Unbekannten vorkommen.

Diese beiden neuen Gleichungen mit zwei Unbekannten behandelt man nun nach dem vorausgegangenen §. Kennt man den Werth von einer Unbekannten, so können die Werthe der übrigen durch Substitution von jenem gefunden werden. Vier Gleichungen mit vier Unbekannten bringt man zuerst in der nämlichen Art auf Gleichungen mit drei Unbekannten ꝛc. Ein Beispiel von Gleichungen mit vier Unbekannten folgt unten §. 148. X.

Anfängern zu Liebe folgt hier ein Beispiel von drei Unbekannten auf dem dreifachen, dann ein anderes auf dem kürzesten Wege aufgelöset. Nach diesem wird allgemein die Auflösung solcher Gleichungen nach der Methode von Bezout gezeigt.

1) A und B besitzen zusammen nur $\frac{2}{3}$ von dem Vermögen eines dritten C; B und C haben zusammen 6mal so viel als A; wäre aber B um 680 fl. reicher, als er wirklich ist, so würde er so reich, als A und C zusammen seyn. Wie reich ist Jeder?

Antwort. Das Vermögen von

A sey $= x$; von B $= y$; von C $= z$.

Also Hauptgleichungen: 1) $x + y = \frac{2}{3}z$

2) $y + z = 6x$

3) $x + z = y + 680$.

I. Auflösung durch bloße Substitution.

Aus 1) $x = \frac{2}{3}z - y$

$$x = \frac{2z - 3y}{3} \ldots\ldots (\alpha$$

Diesen Werth von x substituirt

in 2) und z gesucht!

$$y + z = 6\left(\frac{2z - 3y}{3}\right)$$

$$y + z = 4z - 6y$$

$$7y = 3z$$

$$z = \frac{7y}{3} \ldots\ldots (\beta$$

in 3) und reduzirt!

$$\frac{2z - 3y}{3} + z = y + 680$$

$$2z - 3y + 3z = 3y + 2040$$

$$5z - 6y = 2040 \ldots\ldots (\gamma$$

Den Werth von z in $(\gamma$ substituirt, und y gesucht!

$$5.\frac{7y}{3} - 6y = 2040$$

$$55y - 18y = 6120$$
$$17y = 6120$$
$$y = \frac{6120}{17} = 360.$$

Dieſen Werth von y ſubſtituirt in (β

$$z = \frac{7.360}{3} = 840.$$

Endlich die Werthe von y und z in (α ſubſtituirt:

$$x = \frac{2.840 - 3.360}{3} = \frac{600}{3} = 200.$$

II. Auflöſung durch bloße Komparation.

Nebengleichungen:

1) $x = \frac{2}{3}z - y$
2) $x = \frac{y+z}{6}$
3) $x = y + 680 - z.$

Komparirt die Nebengleichungen 1 und 2.

$$\frac{2}{3}z - y = \frac{y+z}{6}$$
$$4z - 6y = y + z$$
$$3z = 7y$$
$$z = \frac{7y}{3}$$
$$\text{oder } y = \frac{3z}{7}.$$

— die Nebengleichungen 2, 3.

$$\frac{y+z}{6} = y + 680 - z.$$
$$y + z = 6y + 4080 - 6z$$
$$7z = 5y + 4080$$
$$z = \frac{5z + 4080}{7}$$
$$\text{oder } y = \frac{7z - 4080}{5}.$$

Komparirt die beiden Werthe von z.

$$\frac{7y}{3} = \frac{5y - 4080}{7}$$
$$49y = 15y + 12240$$
$$34y = 12240$$
$$y = \frac{12240}{34} = 360.$$

— oder die beiden Werthe von y.

$$\frac{3z}{7} = \frac{7z - 4080}{5}$$
$$15z = 49z - 28560$$
$$28560 = 34z$$
$$840 = z.$$

Um auch x durch Komparation zu finden, vergleicht man

$\frac{2}{3}z - x = 6x - z;$ | $6x - z = x + z - 680$

$2z - 3x = 18x - 3z$

$z = \frac{21x}{5}.$ | $z = \frac{5x + 680}{2}.$

Endlich die zwei Werthe von z.

$$\frac{21x}{5} = \frac{5x + 680}{2}$$

$$42x = 25x + 3400$$

$$17x = 3400$$

$$x = 200.$$

III. Auflösung durch bloße Elimination.

a) $x + y = \frac{2}{3}z$

$z + y = 6x$

$- \quad - \quad -$

$x - z = \frac{2}{3}z - 6x$

$7x = \frac{5}{3}z$

$21x = 5z.$

b) $x + y = \frac{2}{3}z$

$x - y = 680 - z$

$2x = 680 - \frac{1}{3}z$

$6x = 2040 - z$

$5\times) \quad 30x = 10200 - 5z.$

c) $21x = 5z$

$30x = -5z + 10200$

$51x = 10200$

$x = 200.$

d) $6x = 2040 - z$

$6x = 1200$

$- \quad -$

$0 = 840 - z$

$z = 840.$

e) $x + y = \frac{2}{3}z$

$x = 200$

$- \quad -$

$y = \frac{2}{3}z - 200$

$560 = \frac{2}{3}z$

$- \quad -$

$y - 560 = -200$

$y = 360.$

Anmerkung. Man sieht hier, daß die Auflösung der Gleichungen durch einen einzigen Weg sehr langweilig würde.

2) Die Summe dreier Zahlen, paarweise addirt, gibt a, b, c. Wie heißen die Zahlen selbst?

Auflösung durch die Verbindung der drei Wege:

$$x + y = a,$$
$$y + z = b,$$
$$x + z = c.$$

I. Eliminirt.

$$\begin{array}{rrr|l} x + y = a & & & y = a - x \\ x + z = c & & & z = c - x \\ - \quad - & & - & \end{array}$$

$$y - z = a - c$$
$$y + z = b$$
$$2y = a + b - c$$
$$y = \frac{a+b-c}{2}.$$

II. Komparirt. $\frac{a+b-c}{2} = a - x$

$$a + b - c = 2a - 2x$$
$$x = \frac{a+c-b}{2}.$$

III. Substituirt. $z = c - \frac{(a+c-b)}{2}$

$$2z = 2c - a - c + b = c + b - a$$
$$z = \frac{c+b-a}{2}.$$

Anmerkung. Wenn $a = 60$, $b = 70$, $c = 80$; welches sind die Werthe von x, y, z?

Zur Uebung!

3) Es seyen die drei Gleichungen gegeben:

$$ax + by + cz = d \ldots\ldots (A$$
$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \ldots\ldots (B$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \ldots\ldots (C$$

so löset man solche nach der Methode von Bezout in der Art auf daß man zwei derselben mit willkührlichen Größen, etwa A mit m und B mit n, multiplizirt, dann addirt, und von ihrer Summe die dritte Gleichung subtrahirt. Auf diese Art erhält man

$$(am + a_1n - a_2)x + (bm + b_1n - b_2)y$$
$$+ (cm + c_1n - c_2)z = dm + d_1n - d_2 \ldots\ldots (D.$$

Nimmt

Nimmt man nun m und n so an, daß die Koeffizienten von x und $y = 0$ werden, so erhält man eine Gleichung, in welcher nur noch die Unbekannte z vorkommt. Die noch vorhandenen unbestimmten Größen m und n findet man aus den beiden Gleichungen:

$$am + a_1 n - a_2 = 0$$
$$bm + b_1 n - b_2 = 0$$

nach §. 146. IV., wenn man die entsprechenden Buchstaben der untereinandergesetzten ähnlichen Gleichungen:

$$ax + by = c \quad \text{und} \quad a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$am + a_1 n = a_2 \qquad bm + b_1 n = b_2$$

verwechselt. Also

$$m = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a b_1 - a_1 b} \text{ und } n = \frac{a b_2 - b a_2}{a b_1 - b a_1}.$$

Setzt man diese Werthe in D, so wird, da die beiden ersten Glieder hinwegfallen,

$$\left[c\left(\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a b_1 - a_1 b}\right) + c_1\left(\frac{a b_2 - b a_2}{a b_1 - b a_1}\right) - c_2\right] z$$
$$= d\left(\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a b_1 - a_1 b}\right) + d_1\left(\frac{a b_2 - b a_2}{a b_1 - b a_1}\right) - d_2.$$

Multiplizirt man die ganze Gleichung mit dem Nenner, (welcher durchaus der nämliche ist), und dividirt dann durch den Koeffizienten von z die Gleichung, so erhält man

$$z = \frac{d(a_2 b_1 - a_1 b_2) + d_1(a b_2 - b a_2) + d_2(a_1 b - a b_1)}{c(a_2 b_1 - a_1 b_2) + c_1(a b_2 - b a_2) + c_2(a_1 b - a b_1)}$$

Auf die nämliche Art könnte man auch den Werth von y finden, wenn man in der Gleichung D die Koeffizienten von x und $z = 0$ setzte; x fände man, wenn man die Koeffizienten von y und $z = 0$ setzte, oder durch Substitution der Werthe von z und y in eine der gegebenen Gleichungen.

Kürzer aber findet man die Werthe von x und y, wenn man nach §. 146. IV.

für den Werth von y:	für den Werth von x:
z, x, y statt x, y, z	y, z, x statt x, y, z, u. zugl.
und c, a, b — a, b, c	b, c, a — a, b, c

die Koeffizienten mit und ohne Zeiger setzt; was aus dem Grunde erlaubt ist, weil die gegebenen Gleichungen die nämlichen bleiben, wenn man alle diese Verwechselungen zugleich macht. So findet man denn ohne alle fernere Rechnung:

$$y = \frac{d(c_2a_1 - c_1a_2) + d_1(ca_2 - c_2a) + d_2(c_1a - ca_1)}{b(c_2a_1 - c_1a_2) + b_1(ca_2 - c_2a) + b_2(c_1a - ca_1)}$$

$$x = \frac{d(b_2c_1 - b_1c_2) + d_1(bc_2 - b_2c) + d_2(b_1c - bc_1)}{a(b_2c_1 - b_1c_2) + a_1(bc_2 - b_2c) + a_2(b_1c - bc_1)}$$

§. 148.

Probleme mit mehrern unbekannten Größen.

I. Man suche zwei Größen, deren Summe S, und deren Differenz d ist.

Auflösung. Die Zahlen heißen x, y, und es sey $x > y$.

1)
$$\begin{aligned} x + y &= S \\ x - y &= d \\ \hline 2x &= S + d \end{aligned}$$

$$x = \frac{S+d}{2}.$$

2)
$$\begin{aligned} x + y &= S \\ x - y &= d \\ - \quad + \quad & - \\ \hline \text{subtrahirt: } 2y &= S - d \end{aligned}$$

$$y = \frac{S-d}{2}.$$

II. Eine Lieferung von 3 Zentner Zucker und 4 Zentner Kaffee wurde um 950 Gulden; eine zweite von 2 Zentner Zucker und 5 Zentner Kaffee um 925 Gulden, bei einerlei Waarenpreise, gekauft. Wie theuer kam das Pfund von beiden Sorten?

Auflösung. Das Pfund Zucker koste x fl.
Das Pfund Kaffee koste y fl.

	Nebengleichungen.
1) $300x + 400y = 950$ fl.	$x = \frac{19 - 8y}{6}$
2) $200x + 500y = 925$ fl.	$x = \frac{37 - 20y}{8}$.

Komparirt: 3) $\frac{19-8y}{6} = \frac{37-20y}{8}$.

$$24\times)\ 76-32y = 111-60y$$
$$-76+60y = -76+60y$$
$$28y = 35$$
$$y = \tfrac{35}{28} = \tfrac{5}{4} = 1 \text{ fl. } 15 \text{ kr.}$$

4) Um für x einen Werth zu finden, substituire man den Werth von y in der ersten Nebengleichung.

$$x = \frac{19-8.\frac{5}{4}}{6} = \frac{19-10}{6}.$$
$$x = \tfrac{9}{6} = \tfrac{3}{2} = 1 \text{ fl. } 30 \text{ kr.}$$

Probe.

Erste Lieferung.

300 Pfd. Zucker à 1 fl. 30 kr. = 450 fl.
400 Pfd. Kaffee à 1 fl. 15 kr. = 500 fl.
Summe = 950 fl.

Zweite Lieferung.

200 Pfd. Zucker = 300 fl.
500 Pfd. Kaffee = 625 fl.
Summe 925 fl.

III. Ein Vater legte seinem Sohne, um dessen Geschicklichkeit in der Mathematik zu prüfen, folgende Aufgabe vor: Ich habe hier zwei Geldbörsen; nehme ich von der ersten 3 Gulden, und lege sie in die zweite, so enthält diese noch einmal so viel, als die erste. Lege ich aber 5 Gulden aus der zweiten in die erste, so enthält diese die dreifache Summe von jener. — Wie viel Geld ist in jeder Börse?

Auflösung. Die Börse A) enthält x fl.
— — B) — y fl.

Aequation: 1) $x-3 = \frac{y+3}{2}$.
2) $y-5 = \frac{x+5}{3}$.

Nebengleichungen: $x = \frac{y+9}{2}$; $x = 3y-20$.

Komparirt: 3) $\frac{y+9}{2} = 3y-20$

$$y+9 = 6y-40$$
$$49 = 5y$$
$$9\tfrac{4}{5} \text{ fl.} = y.$$

4) $x = \frac{\frac{49}{5}+9}{2} = \frac{47}{5} = 9\frac{2}{5}$ fl.

Probe. Die erste Börse enthielt 9 Gulden 24 Kreuzer. Die zweite 9 Gulden 48 Kreuzer. Nehme ich aus jener 3 fl., und lege sie in diese, so enthält jene 6 fl. 24 kr., diese 12 fl. 48 kr. Aber $\frac{12 \text{ fl. } 48 \text{ kr.}}{2} = 6$ fl. 24 kr. Nehme ich aber aus der zweiten Börse 5 fl. und lege sie in die erste, so enthält jene 4 fl. 48, diese 14 fl. 24 kr. — Nun ist (4 fl. 48) 3 = 14 fl. 24 kr.

IV. Zwei spielten miteinander. Im ersten Spiele verlor der Erste den dritten Theil seines Geldes an den Zweiten, welcher daher dreimal so reich wurde, als jetzt der Erste war. Im andern Spiele aber verspielte der Zweite den dritten Theil seines, durch besagten Gewinn vermehrten, Geldes an den Ersten, der sich nun um 20 kr. reicher sah, als am Anfange des ersten Spiels. Welches war das Spielvermögen von beyden?

Auflösung. A hatte am Anfange x fl.
B — — — y fl.

1) $\frac{2}{3}x = \frac{y+\frac{1}{3}x}{3}$. Nebengleichung: $x = \frac{3y}{5}$.

Oder $2x = y + \frac{1}{3}x$
$5x = 3y$.

2) $\frac{y+\frac{1}{3}x}{3} + \frac{2}{3}x = x + \frac{1}{3}$ fl.

$\frac{3y+x+6x}{9} = x + \frac{1}{3}$

$\times 9)\ 3y + 7x = 9x + 3$
$3y = 2x + 3$ . . . Nebengl. $x = \frac{3y-3}{2}$.

Komparirt. 3) $\frac{3y-3}{2} = \frac{3y}{5}$

$15y - 15 = 6y$
$9y = 15$
$y = \frac{15}{9} = 1\frac{2}{3}$ fl.

folglich $x = \frac{3y}{5} = \frac{3 \times 5}{5 \cdot 3} = 1$ fl.

Es hatte also der Erste 1 fl., der Zweite $1\frac{2}{3}$ fl., als sie zu spielen anfingen.

V. In einer Schatulle befinden sich 2194 fl. 30 kr. in Karolinen und Dukaten (à 5 fl. 30 kr.), welche Netto 2 Pf. 31 Loth wägen. Wie viele Geldstücke von jeder Sorte mögen es seyn, da 804 Dukaten, eben so wie 288 Karolin, 5 bayerische Pfunde schwer sind?

Auflösung. Es seyen x Dukaten,
y Karolin,
und, um die großen Zahlen zu vermeiden, sey $2194\frac{1}{2} = S$,
2 Pfd. 31 Loth = 95 Loth = P,
804 = a. 288 = b.

Der Geldwerth von x Dukaten und y Karolin gibt die eine — das Gewicht beider Münzen gibt die andere Gleichung.

1) $\frac{11x}{2} + 11y = S.$

$11x + 22y = 2S.$

$x = \frac{2S - 22y}{11}.$

2) Gewicht von x Dukaten $= \frac{160x}{a}$.

Loth?	x D.
a.	5.32 Loth.
Antw.	$\frac{160x}{a}$.

Gewicht von y Karolin $= \frac{160y}{b}$ aus dem nämlichen Grunde.

Folglich $\frac{160.x}{a} + \frac{160.y}{b} = P.$

$160.bx + 160ay = ab\,P.$

$x = \frac{ab\,P. - 160.ay}{160.b.}$

Komparirt: 3) $\frac{2S - 22y}{11} = \frac{ab\,P - 160.ay}{160.b}.$

$320.bS - 352\,by = 11.ab\,P - 176.ay$

$+ 176\,ay = \quad + 176\,ay$

$176.ay - 352.by = 11.ab\,P - 320.bS.$

$y(176.a - 352\,b) = 11.ab\,P - 320.bS.$

$y = \frac{11.ab\,P - 320.bS.}{176a - 352.b}$

$$y = \frac{(11 \times 804 \times 288 \times 95) - (320 \times 288 \times 2194\frac{1}{2})}{176 \times 804 - 352 \times 228} = 99.$$

Da nun $x = \frac{2S - 22y}{11} = \frac{4389 - 22y}{11}$,

so ist $x = \frac{4389 - 22 \times 99}{11} = 399 - 198.$

$x = 201.$

Also waren es 201 Dukaten.

99 Karolin.

Die Probe zur Uebung!

VI. Vom Metalle A verlieren a ℔, im Wasser abgewogen, p ℔, vom Metalle B verlieren b ℔ im Wasser q ℔. Eine Mischung aus beiden C, von c ℔, verliere im Wasser r ℔. Wie viel enthält C von A und B?

Auflösung. Es seyen x ℔ von A und y ℔ von B in der Mischung; mithin

1) $x + y = c$, und

Verlust?	x ℔		?	y ℔
℔ a	p ℔	Verlust	b	q
$? = \frac{px}{a}$			$? = \frac{qy}{b}$.	Daher

2) $\frac{px}{a} + \frac{qy}{b} = r.$

Multiplizirt man nach der Methode von Bezout die erste Gleichung mit der willkührlichen Größe m, und zieht davon die zweite ab, nachdem man vorher deren Nenner aufgehoben hat, so erhält man:

$$mx + my = cm$$
$$bpx + aqy = abr$$
$$(m-bp)x + (m-aq)y = cm - abr$$
$$m - bp = o,\ m = bp$$
$$(bp - aq)y = bcp - abr$$
$$y = \frac{b(cp - ar)}{bp - aq}$$
$$m - aq = o,\ m = aq$$
$$(aq - bp)x = acq - abr$$
$$x = \frac{a(cq - br)}{aq - bp}.$$

Z. B. die Krone des Königs Hiero von Syrakus war nach Vitruv 20 Pfund schwer, und verlor im Wasser $1\frac{1}{4}$ Pfd. Nimmt man nun an, sie habe bloß aus Gold und Silber bestanden, und 19,6 Pfd. Gold, so wie 10,5 Pfd. Silber verliere, im Wasser gewogen, 1 Pfd.: wieviel Gold und Silber mußte diese Krone enthalten?

$c = 20$; $r = 1\frac{1}{4} = 1{,}25$; $a = 19{,}6$; $p = 1$; $b = 10{,}5$; $q = 1$.

Die Substitution und Probe zur Uebung!

VII. Jemand hatte eine Hausbibliothek um 187 Gulden gekauft, welche aus Quart-, Octav- und Duodezbänden bestand. Als man ihn um die Anzahl der Bände fragte, gab er zur Antwort: Rechne ich jeden Quartband zu 1 fl., so trifft auf jeden der beiden übrigen $\frac{1}{2}$ fl. Rechne ich den Octavband zu 1 fl., so kommt jeder der übrigen auf $\frac{1}{3}$ fl. Rechne ich aber den Duodezband auf 1 fl., so trifft auf jeden der übrigen $\frac{1}{4}$ fl. Wie läßt sich aus dieser Antwort die Anzahl der Bände im Allgemeinen und im Besondern erschließen?

Auflösung. Es waren x Quart-
y Octav-
z Duodezbände.

	Nebengleichungen.
1) $x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 187$	
oder $2x + y + z = 374$	$x = \frac{374 - y - z}{2}$
2) $y + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z = 187$	
$3y + x + z = 561$	$x = 561 - 3y - z$
3) $z + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y = 187$	
$4z + x + y = 748$	$x = 748 - 4z - y$.

4) Nun komparirt: (erster und zweiter Werth von x).

$$\frac{374 - y - z}{2} = 561 - 3y - z.$$

$$374 - y - z = 1122 - 6y - 2z.$$

$$y = \frac{748 - z}{5}.$$

5) (zweiter und dritter Werth von x).

$$561 - 3y - z = 748 - 4z - y$$

$$y = \frac{3z - 187}{2}.$$

6) (erster und zweiter Werth von y).

$$\frac{748-z}{5} = \frac{3z-187}{2}$$

$$1496-2z = 15z-935$$

$$z = \frac{2431}{17} = 143 \text{ Duodezbände.}$$

Substituirt: 7) $y = \frac{748-143}{5}$

$$y = 121 \text{ Octavbände.}$$

8) $x = \frac{374-121-143}{2} = 55$ Quartbände.

Probe. a) Wenn 55 Quartbände 55 fl. kosten; dann kosten die 121 + 143 = 264 übrigen ..... 132 =

Summa ... 187 fl.

b) Wenn 121 Octavbände .. = 121 fl.
dann die übrigen 198 Bände = $\frac{198}{3}$ = 66

Summa 187 fl.

c) Wenn 143 Duodezbände .. = 143 fl.
dann die übrigen 176 Bände = $\frac{176}{4}$ = 44

Summa 187 fl.

VIII. Drei Studenten feilten um ein Buch, das 5 fl. kostete. Da nun keiner den Betrag baar erlegen konnte, so sprach der erste zum zweiten, gib mir die Hälfte deines Geldes, so kann ich das Buch allein bezahlen.— Eben so begehrte der zweite vom dritten den dritten Theil; der dritte aber vom ersten den vierten Theil seines Geldes, um das Buch allein bezahlen zu können.— Wie viel Geld hatte jeder gehabt?

Auflösung. Der erste hatte x
der zweite y
der dritte z fl.

1) $x + \frac{1}{2}y = 5$. Nebengleichung: $x = \frac{10-y}{2}$

2) $y + \frac{1}{3}z = 5$. . . . . $y = \frac{15-z}{3}$

3) $z + \frac{1}{4}x = 5$. . . . . $x = 20-4z$.

4) Komparirt: (die Werthe von x).

$$\frac{10-y}{2} = 20-4z$$

$$10-y = 40-8z$$

$$-y = -8z+30$$

$$y = 8z-30.$$

5) (die Werthe von y).

$$8z-30 = \frac{15-z}{3}$$

$$24z-90 = 15-z$$

$$25z = 105$$

$$z = \frac{105}{25} = \frac{21}{5} = 4 \text{ fl. } 12 \text{ kr.}$$

Mithin $y = \frac{18}{5} = 3$ fl. 36 kr.

$$x = \frac{16}{5} = 3 \text{ fl. } 12 \text{ kr.}$$

IX. Ich las irgendwo folgenden Küchenzettel:

Montag 7 Pfund Kaffee, 5 Pfund Zucker, 2 Pfund Chocolade um 28 Gulden.

Mittwoch 4 Pfund Kaffee, 6 Pfund Zucker, 3 Pfund Chocolade um 25,7 Gulden.

Samstag 9 Pfund Kaffee, 12 Pfund Zucker, 6 Pfund Chocolade um 53,4 Gulden.

Läßt sich hieraus der Preis für das Pfund jeder Sorte bestimmen, vorausgesetzt daß der Waarenpreis immer der nämliche blieb?

Auflösung. 1 Pfund Kaffee koste x, 1 Pfund Zucker y, 1 Pfund Chocolade z fl.

	Nebengleichungen.
1) $7x+5y+2z=28.$	$x=\frac{28-5y-2z}{7}$
2) $4x+6y+3z=25{,}7.$	$x=\frac{25{,}7-6y-3z}{4}$
3) $9x+12y+6z=53{,}4.$	$x=\frac{53{,}4-12y-6z}{9}.$

4) Komparirt: $\frac{28-5y-2z}{7} = \frac{25{,}7-6y-3z}{4}$

$$y = \frac{67{,}9-13z}{22}.$$

5) $\frac{25{,}7-6y-3z}{4} = \frac{53{,}4-12y-6z}{9}$

$$y = \frac{17{,}7-3z}{6}.$$

6) $\frac{17{,}7-3z}{6} = \frac{67{,}9-13z}{22}$.

$z = \frac{2}{6} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ fl. . . . Werth des Chocolades.

Folglich $y = 2\frac{1}{2}$ fl. . . . Werth des Zuckers.

$x = 2$ fl. . . . Werth des Kaffees.

* Die ohnehin leichten Proben über beide Aufgaben zur Selbstübung.

** Solche Aufgaben können am kürzesten durch Substitution in die allgemeine Gleichung §. 147. 3° gelöset werden.

X. Eine Division von Soldaten wurde beordert, eine Schanze zu erstürmen; darunter befanden sich Badener, Würtemberger, Sachsen, Bayern, in allem 4380 Mann. Da nun die einzelnen Abtheilungen für sich allein zu schwach waren, wurde verordnet, daß, wenn die Badener stürmten, die übrigen die Hälfte ihrer Leute; wenn die Würtemberger stürmten, alle übrigen den dritten Theil; wenn die Sachsen stürmten, alle übrigen den vierten Theil; endlich wenn die Bayern den Sturm wagen würden, die übrigen den fünften Theil ihrer Leute abgeben sollten; denn auf diese Art würde die Zahl der Stürmenden jedesmal gleich seyn. Wie viele Köpfe enthielt nun jede der vier Abtheilungen? Und wie viele stürmten?

Auflösung. Es seyen x Badener.
x Würtemberger.
y Sachsen.
z Bayern.
4380 = S.

I. $v + \frac{x+y+z}{2} = x + \frac{v+y+z}{3}$.

II. $x + \frac{v+y+z}{3} = y + \frac{v+x+z}{4}$.

III. $y + \frac{v+x+z}{4} = z + \frac{v+x+y}{5}$.

IV. $x + y + z + v = S$.

Hieraus ergeben sich folgende 4 Werthe von x.

1) $x = \frac{4v+y+z}{3}$.

2) $x = \frac{8y-v-z}{9}$.

3) $x = 15z - 16y - v$.

4) $x = S - v - y - z$.

V. Erster und zweiter Werth von x komparirt.

$$\frac{4v+y+z}{3} = \frac{8y-v-z}{9}$$

$$y = \frac{13v+4z}{5}.$$

VI. Zweiter und dritter Werth von x.

$$\frac{8y-v-z}{9} = 15z - 16y - v.$$

$$y = \frac{17z-v}{19}.$$

VII. Dritter und vierter Werth von x.

$$15z - 16y - v = S - v - y - z.$$

$$y = \frac{16z-S}{15}.$$

VIII. Erster und zweiter Werth von y.

$$\frac{13v+4z}{5} = \frac{17z-v}{19}.$$

$$v = \frac{9z}{252}.$$

IX. Zweiter und dritter Werth von y.

$$\frac{17z-v}{19} = \frac{16z-S}{15}.$$

$$v = \frac{19S-49z}{15}.$$

X. Erster und zweiter Werth von v.

$$\frac{9z}{252} = \frac{19S-49z}{15}.$$

$$z = \frac{4788\,S}{12483} = \frac{4788 \times 4380}{12483} = 1680.$$

XI. Nun substituirt:

$$v = \frac{9 \times 1680}{252} = 60.$$

XII. $y = \frac{16z - S}{15} = \frac{(16 \times 1680) - 4380}{15} = 1500.$

XIII. $x = S - v - y - z.$

$x = 4380 - 60 - 1500 - 1680.$

$x = 1140..$

Es waren also Badener . . . 60 Mann.
Würtemberger . . 1140 —
Sachsen . . . 1500 —
Bayern . . . 1680 —

Probe.

Stürmende.	I.	II.	III.	IV. Sturm.
Badener . . .	60	20	15	12
Würtemberger .	570	1140	285	228
Sachsen . . .	750	500	1500	300
Bayern . . .	840	560	420	1680
Summe	2220	2220	2220	2220

Aber $60 + 1140 + 1500 + 1680 = 4380.$

Dritter Artikel.

Quadratische Gleichungen.

§. 149.

Quadratische Gleichungen heißen diejenigen, worin die unbekannte Größe in der zweiten, aber in keiner höhern Würde vorkommt; wobei zugleich vorausgesetzt wird, daß sich die Gleichung nicht noch durch die Division mit der unbekannten Größe auf eine Gleichung des ersten Grades reduziren lasse. Aus diesem Grunde ist z. B. die Aequation $3x^2 = 21x$ nicht eigentlich

quadratisch (obwohl sie auch als quadratische behandelt werden kann), indem sie durch die Division mit x auf den Ausdruck

$$3x = 21$$

$$x = 7 \text{ gebracht wird.}$$

Dagegen kann eine Gleichung, in welcher x^2 nicht gegeben ist, doch nach der Reduktion als quadratische erscheinen. Multiplizirt man z. B. die Gleichung $ax + \frac{b}{x} = c$ mit dem Nenner x, so erhält man $ax^2 + b = cx$.

Die quadratischen Gleichungen heißen ferner rein (purae), wenn darin die unbekannte Größe nur in einer Dignität vorkommt, z. B. $x^2 = ab$.

Auch der Ausdruck $ax^2 + bx^2 - cx^2 = S$ stellt eine reine quadratische Gleichung vor, weil sich die Summe der Koeffizienten $a + b - c$ als eine einzige Größe, z. B. d, denken läßt, und x in der nämlichen Würde vorkommt.

$$ax^2 + bx^2 - cx^2 = S$$

$$x^2 (a + b - c) = S$$

$$x^2 = \frac{S}{a+b-c}.$$

Unrein (gemischt, adfectae) heißen die quadratischen Gleichungen, wenn die unbekannte Größe auch in der ersten Potenz vorkommt, z. B. $x^2 + ax = bc$.

Man nennt überdieß solche quadratische Gleichungen, worin nebst dem Quadrate und der ersten Potenz der unbekannten Größe auch noch bekannte Größen vorkommen, vollständige quadratische Gleichungen.

§. 150.

Jede quadratische Gleichung, sowohl reine als unreine, läßt sich, durch Versetzung aller Glieder auf eine Seite, auf 0 bringen. Außerdem kann jede unreine quadratische Gleichung durch weitere Reduktion auf die Form $x^2 + Sx + q = 0$ gebracht werden, wo S und q bloß bekannte, ganze oder gebrochene, positive oder negative, monomische oder polynomische Größen bezeichnen.

z. B. 1) $x^2 = ab$. $x^2 - ab = 0$.

2) $x^2 + ax = bc$. $x^2 + ax - bc = 0$.

3) $\frac{a+b}{x} = \frac{cx}{d-x}$, $ad - ax + bd - bx = cx^2$.

$cx^2 + ax + bx = ad + bd.$

$cx^2 + x(a+b) = ad + bd.$

$cx^2 + x(a+b) - d(a+b) = 0.$

$x^2 + x\left(\frac{a+b}{c}\right) - \frac{d(a+b)}{c} = 0.$

4) $ax + \sqrt{\frac{x^2}{a} - b^2} = 2ax + b$

$\sqrt{\frac{x^2}{a} - b^2} = ax + b$ (Vgl. §. 141. VIII.)

$\frac{x^2}{a} - b^2 = (ax+b)^2 = a^2x^2 + 2abx + b^2$

$x^2 - ab^2 = a^3x^2 + 2a^2bx + ab^2$

$(a^3 - 1)x^2 + 2a^2bx + 2ab^2 = 0$

$x^2 + \left(\frac{2a^2b}{a^3-1}\right)x + \frac{2ab^2}{a^3-1} = 0.$

§. 151.

Aufgabe. Eine reine quadratische Gleichung aufzulösen.

Auflösung. Man bringe sie auf die Form: $x^2 = a$, und ziehe aus beiden Seiten der Gleichung die Quadratwurzel aus.

$$x = \pm\sqrt{a}.$$

Es müssen hier vor dem Wurzelzeichen + und — gesetzt werden, weil sowohl $(+\sqrt{a})^2$ als $(-\sqrt{a})^2 = a$ ist. Jede reine quadratische Gleichung hat daher zwei gleiche, entgegengesetzte Wurzeln, d. i. es gibt für solche immer zwei gleiche entgegengesetzte Werthe, welche in die Gleichung substituirt, dieser Genüge leisten. Welchen von den beiden Werthen oder ob beide (wie dieß in der Geometrie der Fall ist,) man in einer bestimmten Aufgabe nehmen könne, muß der Sinn einer solchen entscheiden.

Hier sind nun weitere drei Fälle möglich.

1) Wenn a ein reines Quadrat, z. B. p^2 ist,

so ist $x^2 = p^2$ $\quad$ $x^2 + 20 = 344$

$x = p$ $\quad$ $x^2 = 324$

$x = \pm 18.$

2) Oder wenn a eine Irrationalzahl, z. B. q, ist, wobei man sich des Wurzelzeichens bedient.

Z. B. $x^2 = q$ $\quad$ $2x^2 - 3 = 13$

$x = \pm\sqrt{q}$. $\quad$ $x^2 = 8$

$x = \pm\sqrt{8}$

$x = \pm\sqrt{4 \times 2} = \pm 2\sqrt{2}$.

3) Endlich wenn $a = -m$, d. i. eine negative Zahl ist, in welchem Falle die Auflösung der Aufgabe unmöglich wird, indem $x = \pm\sqrt{-m} =$ einer unmöglichen Größe wird. Dieses wird dann der Fall seyn, wenn die Aufgabe einen Widerspruch enthält.

Z. B. $x^2 + 20 = \frac{2}{5}x^2 + 5$

$x^2 = -25$

$x = \pm\sqrt{-25} = \pm 5\sqrt{-1}$.

Im zweiten Falle aber läßt sich die Quadratwurzel aus Ziffern durch Annäherung finden.

Z. B. $x^2 = 8$

$x = \sqrt{8} = 2{,}8284272\ldots$

oder $x = 2\sqrt{2} = 2(1{,}4142136) = 2{,}8284272\ldots$

§. 152.

Daß auch vollständige quadratische Gleichungen eine doppelte Wurzel haben, läßt sich wohl schon aus dem Vorhergehenden schließen; kann aber noch aus einem höhern Grunde hergeleitet werden, welcher zugleich für alle höhern Gleichungen, nur mit Modifikation, anwendbar ist.

Man habe die Gleichung $x^2 - 10x + 21 = 0$.

Hier kommt nun alles darauf an, daß man x^2 und x in solchen Zahlen ausdrücke, daß die vorliegende Reihe zu Null werde. Aus §. 43. II. weiß man vorläufig, daß $x^2 - 10x + 21$ eine komplexe Größe sey, welche aus zwei zweigliederigen Faktoren bestehe. Das Produkt von den ersten Gliedern der Faktoren ist in x^2, das Produkt von den zweiten in 21 enthalten.

$x^2 = x \times x$

$21 = \pm 3 \times \pm 7$;

und wirklich $(x-7) \times (x-3) = x^2 - 10x + 21$.

Dieſes Produkt wird nun $=0$, wenn entweder der eine, oder wenn der andere von den beiden Faktoren $=0$ iſt. Im erſten Falle muß $x-7=0$

$x=7$,

im zweiten $x-3=0$

$x=3$ werden.

Man ſubſtituire nun in der Gleichung für x die zwei Werthe, ſo zeigt ſich, daß in beiden Fällen die ganze Formel $=0$ wird.

a) $x^2-10x+21=0$

$x=7$

$49-70+21=70-70=0.$

b) $x=3$

$9-30+21=0$

$30-30=0.$

§. 153.

Auch von $x^2+Sx+q=0$, der allgemeinen Form einer geordneten unreinen quadratiſchen Gleichung (§. 150), kann x^2+Sx+q als ein Produkt zweier binomiſchen Faktoren von der Form: $x-a$ und $x-b$ betrachtet werden, und wird dann $=(x-a)(x-b)$ ſeyn, wenn auch dieſes Produkt $=0$, alſo entweder $x-a$, oder $x-b$, oder beide $=0$ ſind. Aus $x-a=0$ ergibt ſich $x=a$, aus $x-b=0$ eben ſo $x=b$. Alſo hat auch jede unreine quadratiſche Gleichung zwei Wurzeln. (Vgl. §. 151).

Iſt nun $(x-a)(x-b)=0=x^2+Sx+q$, oder

$x^2-(a+b)x+ab=x^2+Sx+q$,

ſo muß $S=-(a+b)$, $q=ab$, d. i. der Koeffizient des zweiten Gliedes der Gleichung gleich der Summe, das dritte Glied gleich dem Produkte vom Gegentheile der beiden Wurzeln ſeyn.

Wenn daher 1) die beiden Wurzeln a und b negativ ſind, ſo wird S und q poſitiv ſeyn.

2) Wenn a und b poſitiv ſind, ſo wird S negativ, q poſitiv.

3) Wenn eine Wurzel z. B. a poſitiv, die andere b negativ iſt, ſo wird q negativ; S wird negativ, wenn $a>b$, poſitiv, wenn $a<b$; $S=0$, wenn $a=b$, d. i. in der reinen quadratiſchen

schen Gleichung sind die beiden Wurzeln gleich und entgegengesetzt. Vgl. §. 151.

4) Kennt man eine Wurzel = a, so kann man daraus einen binomischen Faktor $x-a=0$ bilden. Dividirt man mit diesem in die Gleichung, so erhält man auch den andern Faktor, und aus diesem die zweite Wurzel. Man wisse z. B., daß von der Gleichung $x^2-13x-30=0$ die eine Wurzel $=-2$ ist, so ist der eine Faktor $x+2=0$. Dividirt man damit die Gleichung, so erhält man: $(x^2-13x-30):(x+2)=x-15=$ dem zweiten Faktor, und aus $x-15=0$ die zweite Wurzel $x=15$. Zugleich sieht man, daß $-15+2=-13$, dem Koeffizienten des zweiten Gliedes; $-15\times2=-30$, dem dritten Gliede ist.

5) Sind S und q rationale Zahlen, so müssen die beiden Wurzeln, entweder rational oder irrational, reell oder imaginär seyn. Sind beide Wurzeln irrational, so müssen sie die Form $x=m+\sqrt{n}$ und $x=m-\sqrt{n}$ haben; sind sie imaginär, so müssen sie die Form $x=m+n\sqrt{-1}$ und $x=m-n\sqrt{-1}$ haben. Denn nur unter diesen Bedingungen können S und q nach dem angegebenen Verhältnisse zu den Wurzeln rational seyn.

§. 154.

Was die Auflösung der unreinen quadratischen Gleichungen betrifft, so kann man zweierlei Wege einschlagen. Diese sind die Komplirung (Ergänzung), und die Substitution. Beide Auflösungen setzen voraus, daß die Gleichung auf die Form: $x^2\pm Sx=q$ gebracht; d. i. so reduzirt ist, daß an der ersten Stelle das Quadrat der unbekannten Größe positiv mit dem Koeffizienten 1, an der zweiten Stelle die erste Würde derselben, und zwar, wenn diese in mehreren Gliedern vorkommt, die Summe davon, auf der andern Seite die Summe der bekannten Größen steht.

I. Komplirung. Man weiß nämlich, daß die Formel für die Quadrate der Binomien sey $a^2\pm2ab+b^2$ (vgl. §. 105), d. h. daß das Quadrat einer zweitheiligen Wurzel $a\pm b$ enthalten müsse

1) das Quadrat des ersten Theiles,
2) das doppelte Produkt beider Theile, und
3) das Quadrat des zweiten Theiles.

Vergleicht man damit die erste Seite der allgemeinen Gleichung

$$x^2 \pm Sx = q,$$

so entdeckt man, daß in letzterer zwar das Quadrat des ersten Theiles, auch das doppelte Produkt des ersten und zweiten Theiles, nicht aber das Quadrat des zweiten Theiles vorkomme; d. i.

$$a^2 = x^2$$
$$\pm 2ab = \pm Sx$$
folglich $$\pm 2b = \pm S.$$

Hieraus läßt sich nun leicht bestimmen, wie viel der fehlende Theil von b^2 betragen müsse;

nämlich $$b = \frac{S}{2};$$

quadrirt: $$b = \frac{S^2}{4}.$$

Addire ich nun beiderseits $\frac{S^2}{4}$, so erhalte ich das vollkommene Quadrat von $x \pm \frac{1}{2}S$.

$$x^2 \pm Sx + \tfrac{1}{4}S^2 = q + \tfrac{1}{4}S^2 = \frac{4q + S^2}{4};$$

$$x \pm \tfrac{1}{2}S = \pm \sqrt{\frac{4q + S^2}{4}}.$$

Da man ferner aus dem Nenner 4 die Quadratwurzel wirklich ziehen kann: so ergibt sich

$$x = \frac{\mp S \pm (\sqrt{4q + S^2})}{2}.$$

Die Komplirung einer unreinen quadratischen Gleichung besteht also darin, daß man die Hälfte des Mitfaktors von x quadrirt, und dieses Quadrat, als Komplement, beiderseits addirt.

Z. B. $x^2 - 18x = 63.$

$\frac{1}{2}S = 9.$

$x^2 - 18x + 81 = 63 + 81 = 144$

$x = 9 \pm \sqrt{144} = 9 \pm 12$

$x = 21$ erster Werth

$x = -3$ zweiter Werth.

Probe. 1) $x = 21.$

$441 - 378 = 63.$

2) $x = -3.$

$9 - 18 \times -3 = 9 + 54 = 63.$

* Nach der Formel erhält man:

$$x = \frac{18 \pm \sqrt{252+324}}{2} = \frac{18 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{18 \pm 24}{2}$$

$$x = \frac{42}{2} = 21. \quad \text{Oder: } = -\frac{6}{2} = -3.$$

II. Die Subſtitution beſteht darin, daß man $x \pm \frac{1}{2}S = y$ ſetze, und ſo die ganze Gleichung von x auf y bringe, wodurch ſie aus einer unreinen in eine reine verwandelt wird,

d. i. 1) $x^2 - Sx = q.$

$$x = y + \tfrac{1}{2}S.$$

alſo $x^2 = y^2 + Sy + \tfrac{1}{4}S^2.$

$$-Sx = -Sy - \tfrac{1}{2}S^2.$$

$$y^2 + Sy - Sy + \tfrac{1}{4}S^2 - \tfrac{1}{2}S^2 = q.$$

$$y^2 - \tfrac{1}{4}S^2 \ldots = q$$

$$y^2 = q + \tfrac{1}{4}S^2 = \frac{4p+S^2}{4}$$

$$\sqrt{\quad} \qquad y = \frac{\pm\sqrt{(4q+S^2)}}{2},$$

folglich da $x = y + \tfrac{1}{2}S,$

$$\text{ſo iſt } x = \frac{S \pm \sqrt{(4q+S^2)}}{2}.$$

2) $x^2 + Sx = q.$

$$x = y - \tfrac{1}{2}S.$$

$$x^2 = y^2 - Sy + \tfrac{1}{4}S^2.$$

$$Sx = Sy - \tfrac{1}{2}S^2.$$

$$y^2 - Sy + Sy + \tfrac{1}{4}S^2 - \tfrac{1}{2}S^2 = q \text{ u. ſ. w.}$$

$$y^2 = \frac{4q+S^2}{4}$$

$$\sqrt{\quad} \qquad y = \pm\frac{\sqrt{(4q+S^2)}}{2}.$$

Da nun $x = y - \tfrac{1}{2}S,$ ſo ergibt ſich

$$x = -\tfrac{1}{2}S \pm \frac{\sqrt{(4q+S^2)}}{2}.$$

Anmerkung. Unreine quadratiſche Gleichungen laſſen ſich auch, wie alle höhern Gleichungen, durch Zerfällung des letzten

Gliedes in Faktoren und deren Substitution, durch Annäherung, und außerdem auch durch periodische Kettenbrüche, d. i. solche, deren Quotienten immer wiederkehrend sind, berechnen. Nur von letzterer Auflösungsart soll hier Einiges noch angeführt werden.

Es sey gegeben

$$x^2 + ax = 1,$$

so ist

$$x(x + a) = 1$$

$$x = \frac{1}{a + x}.$$

Substituirt man im Nenner dieses Bruches für x den Werth $\frac{1}{a+x}$, so erhält man:

$$x = \frac{1}{a + \frac{1}{a + x}}$$

durch wiederholte Substitutionen:

$$x = \frac{1}{a + \frac{1}{a + \frac{1}{a + \frac{1}{a}}}}....$$

Z. B. $x^2 + 4x = 1$

$$x = \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4}}}} + ...$$

Näherungswerthe:

$$\frac{0}{1} \left| \frac{4, 4, 4, 4, 4}{\frac{1}{4}, \frac{4}{17}, \frac{17}{72}, \frac{72}{305}, \frac{305}{1292} \ldots.} \right.$$

$$x = \frac{305}{1292} \text{ annähernd.}$$

Auch quadratische Gleichungen von der Form: $x^2 + bx = \frac{b}{a}$ lassen sich durch Kettenbrüche berechnen. Denn folgender periodischer Kettenbruch

$$x = \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cdots}}}}}} = \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+x}}$$

gibt reduzirt die Gleichung $x = \frac{b+x}{ab+ax+1}$ oder

$abx + ax^2 + x = b + x$ oder $x^2 + bx = \frac{b}{a}$. u. s. w.

Die unter I. angegebene Auflösungsart ist jedoch in der Regel vorzuziehen.

§. 155.

Wenn die Zahl, woraus man die Quadratwurzel zu ziehen hat, negativ ist, so zeigt dieß an, daß sich die Gleichung nicht auflösen lasse, d. i. unmöglich, imaginär sey.

Z. B. Man suche zwei Zahlen, deren Summe 2, und deren Produkt 10 sey.

Auflösung. I. $x + y = 2$.

II. $xy = 10$; folglich $x = \frac{10}{y}$.

III. Substituirt: $\frac{10}{y} + y = 2$.

$10 + y^2 = 2y$.

$y^2 + 2y = -10$ u. s. w.

$y = 1 \pm \sqrt{-9}$. } Diese sind die verlangten zwei Zahlen.

Folglich $x = 1 \mp \sqrt{-9}$. }

Da nun hier die Wurzel aus -9 gezogen werden soll, so ist dieses ein sicheres Kennzeichen, daß die Aufgabe unmöglich sey. — Dessen ungeachtet wird auch diese, so wie alle imaginären Gleichungen, zu 0, wenn man den gefundenen Werth für y substituirt.

$$y^2 - 2y + 10 = 0.$$

Denn $y^2 = 1 + 2\sqrt{-9} - 9 = -8 + 2\sqrt{-9}$.

$$\underline{-2y = -2 - 2\sqrt{-9}}$$

$$-8 + 2\sqrt{-9} - 2 - 2\sqrt{-9} + 10 = -10 + 10 = 0.$$

Auch die Probe läßt sich mit den imaginären Werthen machen.

1) $1 + \sqrt{-9} = y$
$\underline{1 - \sqrt{-9} = x}$
$2 = x + y.$

2) $1 + \sqrt{-9}$
$\underline{\times\ 1 - \sqrt{-9}}$
$1 + 9 = 10 = xy.$

(vergl. §. 32. I.)

Man habe nun wieder die allgemeine Gleichung

$$x^2 \pm Sx + q = 0$$

d. i. $x^2 \pm Sx = -q.$

Kompl. $x^2 \pm Sx + \frac{1}{4}S^2 = \frac{1}{4}S^2 - q = \frac{S^2 - 4q}{4}.$

$$\sqrt{\quad} \quad x = \mp \tfrac{1}{2}S \pm \sqrt{\frac{S^2 - 4q}{2}}.$$

Hieraus läßt sich nun allgemein bestimmen, wann die Auflösung einer quadratischen Gleichung unmöglich sey. Wenn nämlich $S^2 < 4q$, d. h., wenn das Vierfache des letzten Gliedes, das eine bekannte Zahl (q) ist, mehr beträgt, als das Quadrat von dem Faktor des zweiten Gliedes, dann ist die Auflösung unmöglich. In allen übrigen Fällen ist sie möglich, und man kann die Wurzel entweder ganz, oder doch durch Annäherung finden. Beträgt aber das Quadrat des Faktors vom zweiten Gliede eben so viel, als das vierfache q, welches als negativ angenommen wird, so erscheint

$$\pm \tfrac{1}{2}S \pm \sqrt{0}.$$

Z. B. $x^2 \pm 6x = -9$
$x^2 \pm 6x + 9 = 9 - 9 = 0$
$x \pm 3 = \pm\sqrt{0}$
$x = \mp 3 \pm \sqrt{0}.$

$S = 6$
$S^2 = 36$
$q = -9$
$4q = 36.$

Probe. 1) $x = -3$
$9 - 18 = -9.$

2) $x = +3$
$9 - 18 = -9.$

§. 156.

Beispiele.

1) $48 - \frac{2}{3}x^2 = \frac{2}{3}x$

$$48 = \frac{2x^2}{3} + \frac{2}{3}x$$

$$x^2 + x = 72$$

$$x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 72 + \frac{1}{4} = \frac{289}{4}$$

$$x + \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{289}{4}} = \pm\frac{17}{2}$$

$$x = \pm\frac{17}{2} - \frac{1}{2} = 8 \text{ oder} = -9.$$

2) Das 3. Beispiel von §. 150

$$x^2 + x\left(\frac{a+b}{c}\right) = \frac{d(a+b)}{c}$$

$$x^2 + x\left(\frac{a+b}{c}\right) + \left(\frac{a+b}{2c}\right)^2 = d\frac{(a+b)}{c} + \left(\frac{a+b}{2c}\right)^2$$

$$x + \frac{a+b}{2c} = \pm\sqrt{\frac{4cd(a+b)+(a+b)^2}{4c^2}}$$

$$x = -\left(\frac{a+b}{2c}\right) \pm \frac{1}{2c}\sqrt{(4cd+a+b)(a+b)}$$

3) Das 4. Beisp. von §. 150.

$$x^2 + \left(\frac{2a^2b}{a^3-1}\right)x + \frac{2ab^2}{a^3-1} = 0$$

$$x^2 + \left(\frac{2a^2b}{a^3-1}\right)x + \left(\frac{a^2b}{a^3-1}\right)^2 = -\frac{2ab^2}{a^3-1} + \left(\frac{a^2b}{a^3-1}\right)^2$$

$$x + \frac{a^2b}{a^3-1} = \pm\sqrt{\frac{a^4b^2 - 2ab^2(a^3-1)}{a^3-1}}$$

$$x = \frac{-a^2b \pm b\sqrt{a^4 - 2a(a^3-1)}}{a^3-1}$$

§. 157.

Probleme des zweiten Grades, reine und unreine.

I. Man theile die Zahl 100 in zwei Theile, von der Art, daß ihr Produkt 2304 betrage. Wie heißen diese Theile?

Antwort. Der Eine x
der Andere $100-x$.

Folglich: $(100-x)\times x = 100x - x^2 = 2304$
$x^2 - 100x = -2304$

Komplirt: $x^2 - 100x + (50)^2 = 2500 - 2304 = 196$.
$\sqrt{}$ $x - 50 = \pm\sqrt{196} = \pm 14$
$x = 50 + 14 = 64$
oder $50 - 14 = 36$.

Und daher ist der andere Theil entweder $100 - 64 = 36$ oder $100 - 36 = 64$. — Also sind die beiden Theile 64 und 36.

II. Man suche zwei Zahlen, welche zum Produkte aus ihrer Summe und Differenz 627; zur Summe ihrer Quadrate aber 1685 geben.

Auflösung. Die eine Zahl $= x$, die andere $= y$.

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2 = 627$$
$$x^2 + y^2 = 1685.$$

Man addire beide Gleichungen

$$\begin{array}{r} x^2 + y^2 = 1685 \\ x^2 - y^2 = 627 \\ \hline 2x^2 = 2312 \\ x^2 = 1156 \\ \sqrt{}\quad x = \pm 34. \end{array}$$

Subtrahirt man sie aber, so ergibt sich

$$2y^2 = 1058$$
$$y^2 = 529$$
$$y = \pm 23.$$

Also sind die verlangten Zahlen 34 und 23.

III. Ein Vater hinterließ bei seinem Tode seinen Kindern ein Vermögen von $a = 70000$ fl. Gleich nach des Vaters Tode starben $m = 2$ Kinder, und so bekam jedes Kind um $n = 4000$ fl. mehr, als es bekommen hätte, wenn keines gestorben wäre. Wie viel Kinder waren Anfangs vorhanden? Wie viel erhielt ein Kind?

Auflösung. Bei dem Tode des Vaters waren es x Kinder, welchen zusammen ein Vermögen von a fl. bestimmt war;

also hätte ein Kind $\frac{a}{x}$ fl. bekommen. Da aber bald darauf m Kinder starben, so blieben noch $x - m$ Kinder übrig, und der Antheil von einem Kinde $= \frac{a}{x-m}$ war nun um n fl. größer, als der Antheil $\left(\frac{a}{x}\right)$ in der ersten Voraussetzung. Daher

$$\frac{a}{x} = \frac{a}{x-m} - n$$

$$ax - am = ax - nx^2 + mnx$$

$$x^2 - mx = \frac{am}{n}$$

$$x = \frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{am}{n} + \frac{m^2}{4}}$$

$$= \frac{2}{2} \pm \sqrt{\frac{14000}{4000} + \frac{4}{4}} = 1 \pm \sqrt{35+1}$$

$x = 7$ Kinder.

Bei dem Tode des Vaters hätte ein Kind $70000 : 7 = 10000$ fl. erhalten; nach dem Tode von zwei Kindern bekam jedes andere $70000 : 5 = 14000$ fl., also um 4000 fl. mehr.

IV. Zwei Kapitalisten liehen, jeder ein Kapital aus. Dem ersten trägt das seine alle Tage 1 fl. $23\frac{25}{73}$ kr. Dem zweiten, welcher um 1200 fl. weniger, aber um 1 Prozent höher ausgeliehen, trägt das seinige in eben der Zeit 1 fl. $40\frac{44}{73}$ kr. Wie heißen die Kapitale und ihre Prozente?

Auflösung. Nach der Proportion findet sich, daß die jährlichen Interessen für den ersten seyen $= 507$, für den zweiten $= 612$ fl... und $507 = a$.. $612 = b$.. $100 = c$.

Das Kapital des ersten $= x$ Prozent y
folglich des zweiten $= x - 12c$.. — $y + 1$.

Nun gelten die Proportionen:

I. $x : c = a : y$ d. i. $x = \frac{ac}{y}$.

II. $(x - 12c) : c = b : y + 1$. d. i. $x = \frac{cb}{y+1} + 12c$.

Komparirt: III. $\frac{ac}{y} = \frac{bc}{y+1} + 12c.$

$$ay + a = by + 12y^2 + 12y.$$

Geordnet: $y^2 + \frac{(b-a+12)y}{12} = \frac{a}{12}.$

Oder, wenn man substituirt

$$y^2 + \frac{117y}{12} = \frac{507}{12}.$$

Verkleinert und ergänzt $y^2 + \frac{39y}{4} + \left(\frac{39}{8}\right)^2 = \frac{4225}{64}.$

$$\checkmark \qquad y = \frac{65}{8} - \frac{39}{8} = 3\tfrac{1}{4}..$$

Also legte der erste sein Geld zu $3\frac{1}{4}$ Prozent, der andere zu $4\frac{1}{4}$ Prozent auf.

Das Kapital des ersten war

$$x = \frac{ac}{y} = \frac{50700 \times 4}{13} = 15600 \text{ fl.}$$

Das des zweiten $15600 - 1200 = 14400$ fl.

V. Ein Krämer kaufte einst einige Zentner Käse, den Zentner zu 27 fl. Tara auf den Zentner eben so viele Pfunde, als er Zentner genommen. (Vgl. I. Th. §. 117). Ein anderes Mal kaufte er einen Zentner weniger, den Zentner zu 33 fl. Das Tara auf den Zentner betrug das zweite Mal um 2 Pfund mehr. Dessen ungeachtet mußte er dieses Mal 10 fl. mehr bezahlen, als das erste Mal. — Wie viele Zentner Käse kaufte der Krämer jedes Mal? ...

Auflösung. Das Tara sey bei dem ersten Kaufe $= x$, so ist auch die Anzahl der Zentner $= x$.

Bei dem zweiten Kaufe ergeben sich $(x-1)$ Zentner, und $(x+2)$ Tara. Nun bestimme man den Geldwerth jedes Kaufes:

1)	fl.?	x Ztn.
	1.	27 fl.
Br. Ztn.	$(100+x)$	100 Ztn. netto.

$$? = \frac{2700x}{100+x}.$$

2)	fl.?	$x-1$ Ztn.
	1.	33 fl.
	$102+x$	100

$$? = \frac{3300x - 3300}{102+x}.$$

Da nun der zweite Werth um 10 fl. mehr beträgt, so ist

$$\frac{2700x}{100+x} + 10 = \frac{3300x - 3300}{102+x}.$$

Führt man diese etwas verwickelte Rechnung durch, so ergibt sich

$$x^2 + \frac{4928x}{59} = \frac{43200}{59}.$$

$$x + \frac{4928}{118} = \sqrt{\frac{34.480.384}{13.924}} = \frac{5872}{118}$$

$$x = \frac{5872 - 4928}{118} = 8.$$

Es hatte also der Krämer das erste Mal 8 Zentner, Tara auf den Zentner 8 Pfund, gekauft. — Das zweite Mal 7 Zentner, 10 Pfund Tara auf den Zentner.

VI. Es wurde ein Haus gekauft, und wieder verkauft, aber mit einem Verluste von so vielen Prozenten, als Hunderte der erste Ankauf betragen hatte. Indem es nun um 1875 Gulden verkauft wurde, so fragt sich, wie hoch es gekauft worden sey?

Auflösung. Setzt man den Ankauf $= 100x$, so gibt x die Anzahl der Hunderte, und x^2 den Verlust an.

Folglich $100x - x^2 = 1875$

$$x^2 - 100x = -1875.$$

Kompl. $x^2 - 100x + (50)^2 = 625$

$\surd$ $x - 50 = \pm\surd 625 = \pm 25$;

folglich $x = 50 + 25 = 75$

oder $= 50 - 25 = 25$.

Das Haus kostete also bei dem ersten Ankauf entweder 7500 — oder 2500 Gulden. In beiden Fällen werden die Bedingnisse der Aufgabe erfüllt.

$x = 75.$

1) Pr.? | 75øø

1øø | 75

? = | 5625 fl. Verlust.

7500 — 5625 = 1875.

$x = 25.$

2) Pr.? | 25øø K.

1øø | 25

? = | 625 Verlust.

2500 — 625 = 1875 fl.

§. 158.

Zu den unreinen quadratischen Gleichungen gehört auch die Ausziehung der Quadratwurzel aus irrationalen Binomien, d. i. den Quadraten solcher zweitheiliger Größen, von denen eine, oder auch beide die Wurzelzeichen vor sich haben.

Man habe das Binomium $28 + 10\sqrt{3}$, woraus die Quadratwurzel gezogen werden soll.

Operation. Da die Wurzel ebenfalls zweitheilig wird, so setze man sie $= \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

Also $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{[28 + 10\sqrt{3}]}$

quadrirt: $(x+y) + 2\sqrt{xy} = 28 + 10\sqrt{3}$.

Man sieht hier offenbar, daß der rationale Theil $x+y$ (welcher eingeklammert wurde, um ihn von dem irrationalen zu unterscheiden) $= 28$ sey, und $2\sqrt{xy} = 10\sqrt{3}$.

Hieraus ergibt sich denn die Gleichung:

I. $x + y = 28$

$x = 28 - y$.

II. $2\sqrt{xy} = 10\sqrt{3}$

$\sqrt{xy} = 5\sqrt{3}$

quadrirt: $xy = 25 . 3 = 75$

$x = \frac{75}{y}$.

III. Komparirt: $28 - y = \frac{75}{y}$

$28y - y^2 = 75$

$y^2 - 28y = -75$.

Komplirt: $y^2 - 28y + (14)^2 = 121$.

$y = 14 \pm 11 = 25$ oder 3;

folglich $x = 3$ oder 25.

Die verlangte Wurzel ist also $\sqrt{25} + \sqrt{3} = 5 + \sqrt{3}$.

* Durch die nämliche Operation ergibt sich, daß z. B.

$\sqrt{12 + 2\sqrt{35}} = \sqrt{5} + \sqrt{7}$ sey.

** Der zweite Theil des Binomiums kann auch negativ seyn,

z. B. $\sqrt{15 - 6\sqrt{6}} = \begin{cases} -3 + \sqrt{6} \\ \text{oder} \\ +3 - \sqrt{6}. \end{cases}$

Beide Wurzeln geben das obige Binomium zum Quadrate.

$$\begin{array}{r} -3+\sqrt{6} \\ -3+\sqrt{6} \\ \hline 9-3\sqrt{6} \\ -3\sqrt{6}+6 \\ \hline 15-6\sqrt{6}. \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3-\sqrt{6} \\ 3-\sqrt{6} \\ \hline 9-3\sqrt{6} \\ -3\sqrt{6}+6 \\ \hline 15-6\sqrt{6}. \end{array}$$

§. 159.

Allgemein sey das gegebene Binomium, woraus die Wurzel zu ziehen ist, $a \pm \sqrt{b}$, und

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y};$$

so wird $(\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^2 = \sqrt{a \pm \sqrt{b}}$

$$(x+y) + 2\sqrt{xy} = a \pm \sqrt{b}.$$

I. $x + y = a$

$$x = a - y.$$

II. $2\sqrt{xy} = \pm\sqrt{b}$

$$\sqrt{xy} = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{b}$$

$$xy = \tfrac{1}{4}b$$

$$x = \frac{b}{4y}.$$

III. Komparirt: $a - y = \frac{b}{4y}$

$$y^2 - ay + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2 - b}{4}$$

$$y = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - b}}{2}.$$

$$x = \frac{a \mp \sqrt{a^2 - b}}{2}.$$

Hier sind nun zwei Fälle möglich.

Erster Fall. Wenn $a^2 - b = T^2$, d. i. ein reines Quadrat ist,

so wird $y = \frac{a - \sqrt{T^2}}{2} = \frac{a - T}{2}$

$$x = \frac{a + \sqrt{T^2}}{2} = \frac{a + T}{2}.$$

Und dann ist

$$\sqrt{x} = \sqrt{\frac{a+T}{2}} \text{ und } \sqrt{y} = \sqrt{\frac{a-T}{2}}, \text{ also}$$

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+T}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-T}{2}};$$

d. i.: Um aus dem Binomium $a+\sqrt{b}$ die Quadratwurzel zu finden, subtrahire man vom Quadrate des rationalen Theiles (von a^2) das Quadrat des irrationalen (b); ziehe aus der Differenz (T^2) die Wurzel, bestimme die halbe Summe und halbe Differenz vom rationalen Theile und jener Wurzel, ziehe aus jeder derselben die Quadratwurzel, und verbinde die beiden Resultate durch das nämliche Zeichen, durch welche die gegebenen Theile verbunden sind.

Z. B. In dem Binomium

$15-6\sqrt{6}$ ist $a = 15$ und $a^2 = 225$

$\sqrt{b} = 6\sqrt{6}$

und $b = 216$.

Folglich $a^2 - b = 225 - 216 = 9 = T^2$.

Also $\sqrt{x} = \sqrt{\frac{15+3}{2}} = \sqrt{9} = 3$

$$-\sqrt{y} = -\sqrt{\frac{15-3}{2}} = -\sqrt{\frac{12}{2}} = -\sqrt{6}.$$

Anmerkung 1. Diese Regel ist sogar anwendbar,

1) wenn der irrationale Theil imaginär ist.

Z. B. $\sqrt{7+6\sqrt{-2}}$. Hier ist $a=7$ $\sqrt{b}=6\sqrt{-2}$

$a^2 = 49$. $b = -72$.

$T^2 = a^2 - b = 49 + 72 = 121$ und $T = 11$.

Daher die verlangte Wurzel:

$$\sqrt{\frac{7+11}{2}} + \sqrt{\frac{7-11}{2}} = \sqrt{9} + \sqrt{-\tfrac{4}{2}} = 3 + \sqrt{-2}.$$

2) wenn der rationale Theil fehlt, d. h. $=0$ ist.

Z. B. $\sqrt{6\sqrt{-9}}$. Hier ist $a=0$ $\sqrt{b}=6\sqrt{-9}$.

und $b = -324$.

Folglich $-b = 324$ und $a^2 - b = 324 = T^2$

und $T = \sqrt{324} = 18$.

Mithin ist die verlangte Wurzel:

$$\sqrt{\tfrac{18}{2}} + \sqrt{-\tfrac{18}{2}} = \sqrt{9} + \sqrt{-9} = 3 + \sqrt{-9}.$$

Anmerkung 2. Obige Formel findet vorzüglich Anwendung bei Auflösung der biquadratischen Gleichung: $x^4 - 2qx^2 = q$, welche in der That eine quadratische ist, nur daß man am Ende aus der Wurzel noch einmal die Wurzel ziehen muß.

Man setze $x^2 = y$

substituirt: $y^2 - 2ay = q$

Kompl. $y^2 - 2ay + a^2 = a^2 + q$

$y = a \pm \sqrt{a^2 + q}$

also $x^2 = a \pm \sqrt{a^2 + q}$.

Hier ist nun der irrationale Theil $\sqrt{b} = \sqrt{a^2 + q}$;

folglich $b = a^2 + q$.

Die Differenz von den Quadraten des rationalen und irrationalen Theiles, d. h. $a^2 - b = -q$. Ist nun $-q$ ein Quadrat, d. i. $= T^2$ und $q = -T^2$, so kann die Wurzel kürzer ausgedrückt werden, wie oben:

$$x = \sqrt{\frac{a+T}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-T}{2}}.$$

* Man habe die Aequation: $x^4 - 52x^2 = -576$; und $x^2 = y$, so ist: $y^2 - 52y + (26)^2 = 676 - 576 = 100$.

Hier ist $a = 26$, $a^2 = 676$, $b = 100$ | also $a^2 - b = 576 = T^2$ und $T = 24$.

Da aber $y = x^2$;

so ist $x = \sqrt{\frac{26+24}{2}} \pm \sqrt{\frac{26-24}{2}} = 5 \pm 1$.

Die verlangte Wurzel ist also entweder 6 oder 4.

Zweiter Fall. Wenn $(a^2 - b)$ kein reines Quadrat ist, so läßt sich die Quadratwurzel aus solchen Binomien nur mittelst des Wurzelzeichens ausdrücken.

Z. B. $\sqrt{3 + \sqrt{2}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ u. s. w.

$$x = \frac{3 + \sqrt{7}}{2}$$

$$y = \frac{3 - \sqrt{7}}{2}.$$

Also $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{7}}{2}}+\sqrt{\frac{3-\sqrt{7}}{2}}$.

Die Probe zur Uebung!

§. 160.

Zum Beschlusse dieses Artikels noch einige Gleichungen, worin die unbekannte Größe in der dritten und ersten, oder in der vierten und zweiten, oder in der $2m^{ten}$ und m^{ten} Potenz vorkommt, und welche sich als quadratische behandeln lassen, und einige quadratische Gleichungen mit zwei unbekannten Größen.

I. Aus der Differenz zweier Zahlen d, und aus der Differenz ihrer Kubusse D, die Zahlen x und y zu bestimmen.

Auflösung. I. $x^3-y^3=D$.

II. $x-y=d$.

Man dividire I. durch II.

$$\frac{x^3-y^3}{x-y}=x^2+xy+y^2=\frac{D}{d}.$$

Ferner $(x-y)^2=d^2$

$$x^2+xy+y^2=\frac{D}{d}$$

$$x^2-2xy+y^2=d^2$$

$$-\quad+\quad-\quad-$$

$$3xy=\frac{D-d^3}{d}$$

$$y=\frac{D-d^3}{3d.x} \text{ und } -y=\frac{d^3-D}{3d.x}.$$

Substituirt: $x+\frac{d^3-D}{3d.x}=d$.

$$x^2-dx=\frac{D-d^3}{3d}.$$

Komplirt: $x^2-dx+(\frac{1}{2}d)^2=\frac{4D-d^3}{12d}$.

$$x=\frac{d+\sqrt{\left[\frac{4D-d^3}{3d}\right]}}{2}$$

$$\text{also}=\frac{-d+\sqrt{\left[\frac{4D-d^3}{3d}\right]}}{2}$$

* Es sey $D=1946$ und $d=2$.

So

So wird $x = \frac{2 + \sqrt{(7776)}}{2} = \frac{2+36}{2} = 19.$

$$y = \frac{-2+36}{2} = 17.$$

II. Man suche zwei Zahlen, welche zum Produkte 240, und zur Summe ihrer Quadrate 481 geben.

Auflösung. Auf die kürzeste Art wird diese Aufgabe also gelöset: es sey $481 = S$ und $240 = p$.

Also $x^2 + y^2 = S$.

1) $xy = p.$ | $x^2 + y^2 = S$ | $2xy = 2p.$ | $x^2 + 2xy + y^2 = S + 2p.$

Man verdopple die zweite Gleichung, und setze sie einmal positiv, und einmal negativ zur ersten Gleichung.

$$x + y = \sqrt{S + 2p} = \sqrt{961} = 31.$$

2) $x^2 + y^2 = S.$ | $-2xy = -2p$ | $x^2 - 2xy + y^2 = S - 2p$

$$x - y = \sqrt{S - 2p} = \sqrt{1} = 1.$$

3) $x + y = 31$ | $x - y = 1$ | $x = \frac{32}{2} = 16.$

4) $x + y = 31$ | $-x + y = -1$ | $y = \frac{30}{2} = 15.$

* Auf eine ähnliche Art wird die Aufgabe gelöset:

$x^3 + y^3 = \Sigma$

$xy = \Pi.$ Nur daß sich die Aufgabe von der sechsten Würde, nach Ausziehung der Quadratwurzel, in eine Gleichung des dritten Gliedes verwandelt.

III. Man suche zwei Zahlen, welche zum Produkte 145, und zur Differenz ihrer Quadrate 48 geben.

Auflösung.

Die Zahlen heißen x, y; folglich $x^2 - y^2 = d$

$143 = p.$ $xy = p.$

$48 = d.$

Da hier y^2 negativ ist, so läßt sich das Doppelte von xy nicht mit Vortheil addiren, indem die Summe kein Quadrat gibt.

Also substituirt: $y = \frac{p}{x}$

$$y^2 = \frac{p^2}{x^2}$$

$$x^2 - \frac{p^2}{x^2} = d$$

$$x^4 - dx^2 = p^2;$$

ergänzt: $x^4 - dx^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{4p^2 + d^2}{4}$

$$x^2 = \frac{d + \sqrt{4p^2 + d^2}}{2} = \frac{48 + \sqrt{84100}}{2}$$

$$x^2 = 169; \quad x = 13.$$

Mithin $y = \frac{p}{x} = \frac{143}{13} = 11.$

Also sind die verlangten Zahlen 13 u. 11.

IV. Man löse die Gleichung $ax^{2m} + bx^m = c.$

Auflösung. $x^{2m} + \frac{b}{a}x^m = \frac{c}{a}$

Man setze $x^m = y$, so ist

$$y^2 + \frac{b}{a}y = \frac{c}{a}$$

$$y^2 + \frac{b}{a}y + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$y = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{4ac + b^2}$$

$x = \sqrt[m]{y}$, mithin

$$x = \sqrt[m]{\left(-\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{4ac + b^2}\right)}.$$

In gleicher Art lassen sich auch Gleichungen von der Form:

$$(x^2 + ax + b)^{2m} + p(x^2 + ax + b)^m = q$$

als quadratische lösen, wenn man $x^2 + ax + b = y$ setzt.

V. Man suche zwei Größen, deren Summe ihrem Produkte, und überdieß der Differenz ihrer Quadrate gleiche, d. i. man löse die Aufgabe:

$$x + y = xy = x^2 - y^2.$$

Auflösung. 1) $x + y = x^2 - y^2$.

$(x+y:)$ $1 = x - y$.

2) $x = y + 1$ ferner: 3) $x = y + 1$

$y = y$ $y = y$

$x+y = 2y + 1.$ $xy = y^2+y.$

Da nun die Summe $(x+y)$ dem Produkte (xy) gleich seyn soll, so ist auch

4) $y^2 + y = 2y + 1$

$y^2 - y = 1.$

Kompl. $y^2 - y + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

5) $x = y + 1$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Probe.

1) $x + y = \frac{4+2\sqrt{5}}{2} = 2 + \sqrt{5}.$

2) $xy = \frac{(3+4\sqrt{5})+5}{4} = \frac{8+4\sqrt{5}}{4} = 2 + \sqrt{5}.$

3) $x^2 - y^2 = \frac{(14+6\sqrt{5})}{4} - \frac{(6+2\sqrt{5})}{4} = \frac{8+4\sqrt{5}}{4} = 2 + \sqrt{5}.$

VI. Endlich suche man zwei Zahlen von der Art, daß ihre Summe, ihr Produkt, die Summe ihrer Quadrate einander gleich sind; d. i.

$$x + y = xy = x^2 + y^2.$$

Auflösung. Man setze $x = a + b$

$y = a - b$

$x + y = 2a$, die Summe;

$xy = a^2 - b^2$ das Produkt;

$x^2 + y^2 = 2a^2 + 2b^2$ die Summe der Quadrate der Zahlen.

Nun vergleiche man die Summe der Zahlen mit ihrem Produkte.

$2a = a^2 - b^2$

$b^2 = a^2 - 2a.$

Diesen Werth von b^2 in der Summe der Quadrate substituirt, $x^2+y^2=2a^2+2a^2-4a=4a^2-4a$,

und mit der Summe $2a$ verglichen,

$$2a = 4a^2-4a$$
$$6a = 4a^2$$
$$\tfrac{3}{2} = a;$$

folglich $b^2=a^2-2a=\frac{9}{4}-\frac{12}{4}=-\frac{3}{4}$

$$b=\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}.$$

Es wird also $x=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}=\frac{3+\sqrt{-3}}{2}$,

$$y=\tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}=\frac{3-\sqrt{-3}}{2}.$$

Probe.

1) $x+y=\frac{6}{2}=3.$

2) $xy=\frac{12+(3\sqrt{-3})-(3\sqrt{-3})}{4}=\frac{12}{4}=3.$

3) $x^2+y^2=\frac{6+(6\sqrt{-3})}{4}+\frac{6-(6\sqrt{-3})}{4}=\frac{12}{4}=3.$

Vierter Artikel.

Kubische Gleichungen.

§. 161.

Erklärungen.

1) **Kubische Gleichung** ist diejenige, worin die höchste Würde der unbekannten Größe der Kubus oder die dritte Würde ist; z. B. $x^3=C.$

2) Eine kubische Gleichung heißt **rein**, wenn die unbekannte Größe nur allein im Kubus, und weder im Quadrate noch in der ersten Würde vorkommt; z. B. $3x^3=81.$

Auch diese und ähnliche Formeln, z. B.

$$ax^3+bx^3-cx^3=S$$

gehören zu den rein kubischen Gleichungen; denn durch Zerfällung ergibt sich $(a+b-c)\,x^3=S$

$$x^3=\frac{S}{a+b-c}.$$

3) **Unrein** heißt sie, wenn außer dem Kubus noch das Quadrat und die erste Potenz der unbekannten Zahl vorkommt; und zwar heißt die Gleichung **vollständig**, wenn sie alle diese drei Stücke enthält; widrigenfalls **unvollständig**.

Das Formular der vollständigen kubischen Gleichungen ist:

$$ax^3 \underline{+} bx^2 \underline{+} cx = \overline{+} d.$$

§. 162.

Um eine reine kubische Gleichung, z. B. $3x^3 = 81$ aufzulösen, hat man nur vonnöthen, sie auf die Form $x^3 = a$ zu bringen, und beiderseits die Kubikwurzel auszuziehen; z. B.

$$3x^3 = 81$$
$$\sqrt[3]{\quad} \quad x^3 = 27$$
$$x = 3.$$

Ferner: $\frac{x}{2} \times \frac{x}{3} \times \frac{x}{4} = 72.$

$$\frac{x^3}{24} = 72.$$
$$\sqrt[3]{\quad} \quad x^3 = 1728$$
$$x = 12.$$

§. 163.

Es läßt aber jede kubische Gleichung einen dreifachen Werth für x zu, wiewohl man sich in den gemeinen Rechnungen mit einem begnüget, indem die andern zwei nicht selten negativ oder gar unmöglich werden.

Um diesen wichtigen Satz für die reinen kubischen Gleichungen zu erweisen, habe man die allgemeine Gleichung

$$x^3 = c^3$$
oder $$x^3 - c^3 = 0.$$

Hier ist offenbar für x ein Werth c

oder $$x = c$$
$$x - c = 0.$$

Um nun einen zweiten Werth für x zu finden, dividire man $(x^3 - c^3)$ durch $(x - c)$.

$$x-c)\ x^3-c^3 \quad |\ x^2+cx+c^2$$
$$\underline{x^3-cx^2}$$
$$cx^2-c^3$$
$$\underline{cx^2-c^2x}$$
$$c^2x-c^3$$
$$\underline{c^2x-c^3}$$
$$0.$$

Da nun das Produkt (x^3-c^3) aus den Faktoren $(x-c)$ und (x^2+cx+c^2) besteht, so ergibt sich, daß ersteres zu 0 werden müsse, wenn entweder der erste, oder wenn der zweite Faktor, oder beide $=0$ sind.

Es sey also $x^2+cx+c^2=0.$

$$x^2+cx=-c^2.$$

Kompl. $$x^2+cx+\left(\frac{c}{2}\right)^2=-\frac{3c^2}{4}$$

$$\sqrt{\quad} \quad x=\frac{-c\pm\sqrt{-3c^2}}{2}=\frac{-c\pm c\sqrt{-3}}{2}$$

zerfällt: $$=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\times c.$$

Hieraus ergeben sich denn die zwei neuen Werthe für x:

$$x=\frac{(-1+\sqrt{-3})}{2}\times c$$

$$x=\frac{(-1-\sqrt{-3})}{2}\times c.$$

Um die Sache noch allgemeiner zu machen, weil c^3 auch eine Irrationalzahl werden kann, sey

$$c^3=k, \text{ folglich } c=\sqrt[3]{k}$$

Es sind also die drei Werthe jeder reinen kubischen Gleichung

1) $x=\sqrt{k}.$

2) $x=\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{k}.$

3) $x=\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)\times\sqrt[3]{k}.$

* Um diese allgemeine Formel in spezielle Fälle aufzulösen, habe man

a) $x^3=1.$

b) $y^3=8.$

z) $z^3=27.$

Im ersten Falle ist $\sqrt[3]{k} = 1.$

Im zweiten Falle ist $\sqrt[3]{k} = 2.$

Im dritten Falle ist $\sqrt[3]{k} = 3.$

Es sind also die drei Wurzeln

für a) $x = 1.$

$$x = \left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right) \times 1.$$

$$x = \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right) \times 1.$$

für b) $y = 2.$

$$y = \left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right) \times 2 = -1+\sqrt{-3}.$$

$$y = -1-\sqrt{-3}.$$

für c) $$z = \frac{-3+3\sqrt{-3}}{2}$$

$$z = \frac{-3-3\sqrt{-3}}{2}$$

$$z = 3.$$

Die Probe hierüber kann auf doppelte Art gemacht werden. Entweder kubire man jede dieser Formeln, und dann geben diese drei Werthe für x jedesmal 1, die für y ... 8, die für z ... 27; z. B.

$-1+\sqrt{-3}$	$-1-\sqrt{-3}$
$\times -1+\sqrt{-3}$	$-1-\sqrt{-3}$
$-2-2\sqrt{-3}$ Quadr.	$-2+2\sqrt{-3}$ Quadr.
$\times -1+\sqrt{-3}$	$-1-\sqrt{-3}$
$2+2\sqrt{-3}$	$2-2\sqrt{-3}$
$-2\sqrt{-3}+6$	$+2\sqrt{-3}+6$
8 Kubus.	8 Kubus.

Oder man substituire jeden dieser imaginären Werthe in der Formel: $x^2 + cx + c^2 = 0,$

worauf die Gleichung in jedem Falle $= 0$ wird.

Operation. 1) $x = -1 + \sqrt{-3}$,

so ist $x^2 = -2 - 2\sqrt{-3}$

$cx = -2 + 2\sqrt{-3}$

$c^2 = \quad 4$

$x^2 + cx + c^2 = +4 - 4 = 0.$

2) $x = -1 - \sqrt{-3}$,

folglich $x^2 = -2 + 2\sqrt{-3}$

$cx = -2 - 2\sqrt{-3}$

$c^2 = +4$

$x^2 + cx + c^2 = +4 - 4 = 0.$

§. 164.

Satz. Auch unreine (vollständige oder unvollständige) kubische Gleichungen haben dreierlei Wurzeln.

Beweis. Offenbar kann

$$x^2 - (a+b)x + ab = (x-a).(x-b) = 0$$

jede quadratische Gleichung vorstellen. Aus dieser quadratischen Gleichung entsteht nun die kubische, wenn noch ein dritter Faktor $x = c$ oder $x - c = 0$ hinzutritt, wo a, b, c alle mögliche Zahlen vorstellen kann.

Es ist aber $[x^2 - (a + b)x + ab] \times (x - c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc = 0$ (welches für die allgemeine Form aller kubischen Gleichungen gelten kann). In dieser Gleichung kann x jeden Werth haben, welcher die Gleichung zu 0 macht. Nun macht sowohl der Werth von a, als b und c die Gleichung zu 0 (denn wenn einer der Faktoren $= 0$ ist, ist auch das Produkt $= 0$).

Also sind a, b, c die drei Wurzeln dieser kubischen Gleichung, welche die Form aller übrigen ist; folglich hat jede kubische Gleichung drei Wurzeln, oder ist ein Produkt aus drei Faktoren.

Zusatz. I. Ist in dieser Formel $b = c = \pm a$, so erhält man: $x^3 \pm 3ax^2 + 3a^2x \pm a^3 = 0$.

Ist aber, wie §. praec., $a + b + c = 0$, $ab + ac + bc = 0$ und $a^2 = bc$, so erhält man

$$x^3 - a^3 = 0.$$

Zusatz II. Setzt man $a+b+c=S$

$$ab+ac+bc=\Pi$$

$$abc=p,$$

so verwandelt sich die kubische Gleichung in diese:

$$x^3-Sx^2+\Pi x-p=0.$$

Dieses ist auch die Form einer geordneten unreinen kubischen Gleichung. Auf diese Form kann jede kubische Gleichung durch die nämlichen Umformungen gebracht werden, welche zur Reduktion einfacher und quadratischer Gleichungen angewendet wurden. Z. B.

$$12-2x=6-2\sqrt[3]{6x+12}$$

$$6-2x=-2\sqrt[3]{6x+12}$$

$$(3-x)^3=(-\sqrt[3]{6x+12})^3$$

$$27-27x+9x^2-x^3=-6x-12$$

$$x^3-9x^2+21x-39=0.$$

Zusatz III. In jeder vollständigen kubischen Gleichung ist:

1) Der Koeffizient des zweiten Gliedes S gleich der Summe der Wurzeln,
2) Der Koeffizient des dritten Gliedes Π gleich der Summe der Produkte aus je zwei Wurzeln,
3) das letzte Glied p gleich dem Produkte der drei Wurzeln; — diese mit entgegengesetzten Zeichen genommen.

Man habe die kubische Gleichung:

$$x^3-9x^2+23x-15=0.$$

Diese, so wie jede kubische, Gleichung kann nun keine Wurzel haben, welche nicht ein Faktor des letzten Gliedes (hier — 15) ist.

Die Faktoren von 15 sind: 1, 3, 5, 15. Die drei ersten machen die Gleichung zu 0.

$\alpha)\ x=1=a$	$1-9+23-15=0$
$\beta)\ x=3=b$	$27-81+69-15=0$
$\gamma)\ x=5=c$	$125-225+115-15=0.$

Offenbar ist nun: $S=a+b+c=1+3+5=9$

$$\Pi=ab+ac+bc=3+5+15=23$$

$$p=abc=15.$$

Hat man einmal einen Faktor für x gefunden, so ergeben sich die beiden übrigen, wenn man den bekannten = 0 setzt, und damit in die ganze Gleichung dividirt.

$$x-1 \mid x^3-9x^2+23x-15 \;\Big|\; x^2-8x+15=0.$$

$$\begin{array}{r} x^3-x^2 \\ -\quad + \\ \hline -8x^2+23x \\ -8x^2+\ 8x \\ +\quad - \\ \hline 15x-15 \\ 15x-15 \\ -\quad + \\ \hline 0. \end{array}$$

b

Also: $x^2-8x \quad = -15$

Kompl. $x^2-8x+(4)^2 = \quad 16-15=1$

folglich $x = 4+\sqrt{1} = 5$

oder $x = 4-\sqrt{1} = 3.$

Anmerkung. Dieses letzte Verfahren muß jederzeit angewendet werden, so oft sich die drei Wurzeln aus der bloßen Substitution nicht ergeben, oder wenn sie irrational, oder gar unmöglich sind;

z. B. in der Gleichung: $x^3-x^2-4=0.$

Die Faktoren von 4 sind 1. 2. 4.

Nun substituirt:

$x=1$	$1-1-4=-4$
$x=2$	$8-4-4=\ \ 0$
$x=4$	$64-16-4=+44$

Da hier nur ein rationaler Faktor des letzten Gliedes die Gleichung auf 0 bringt, so müssen die beiden andern Wurzeln irrational werden:

$$(x^3-x^2-4):(x-2)=x^2+x+2.$$

$$x^2+x=-2.$$

$$x=\frac{-1+\sqrt{-7}}{2}$$

$$x=\frac{-1+\sqrt{-7}}{2}$$

Zusatz IV. Sind alle Koeffizienten der Gleichung reelle Größen, so ist entweder eine Wurzel oder es sind alle drei Wurzeln reell. Zwei Wurzeln können (im erstern Falle) auch imaginäre Größen seyn, müssen aber die Form $x = m + n\sqrt{-1}$ und $x = m - n\sqrt{-1}$ haben; nur unter dieser Voraussetzung fällt durch eine nach Zus. III. vorgenommene Verbindung der Wurzeln die Form der imaginären Größen hinweg.

Zusatz V. Sind alle Koeffizienten ganze Zahlen, so kann keine Wurzel ein rationaler Bruch seyn; denn, gesetzt $\frac{m}{n}$ sey eine Wurzel der Gleichung, und m so wie n seyen ganze Zahlen und Primzahlen unter sich, so wäre durch Substitution in die Formel (Zusatz II.)

$$\frac{m^3}{n^3} - \frac{Sm^2}{n^2} + \frac{\Pi m}{n} - p = 0, \text{ oder}$$

$$m^3 - Sm^2n + \Pi mn^2 - pn^3 = 0; \text{ folglich}$$

$$\frac{m^3}{n} = Sm^2 - \Pi mn + pn^2$$

Nun sind gemäß der Voraussetzung S, Π, p, m und n ganze Zahlen, also auch $Sm^2 - \Pi mn + pn^2$ ein Ganzes; mithin müßte auch $\frac{m^3}{n}$ eine ganze Zahl, und m^3 durch n theilbar seyn, was nicht möglich ist, da nach der Voraussetzung m und n, daher auch mmm und n keinen gemeinschaftlichen Theiler haben.

§. 165.

Nicht allezeit sind die rationalen Wurzeln für x positiv, sondern sehr oft eine, oder die andere, oder gar alle drei negativ. Um dieses zu erkennen, hat man nur auf die Zeichen aller Glieder einer kubischen Gleichung zu sehen.

Es erscheinen aber folgende Formeln:

I. Wenn drei Wurzeln positiv, $x = a$ oder $x - a = 0$
$x = b$ .. $x - b = 0$
$x = c$ .. $x - c = 0$
$$x^3 - Sx^2 + \pi x - p = 0$$

II. Wenn zwei Wurzeln positiv, und eine negativ,
d. i. $x = a$
$x = b$
$x = -c$.

$$x^3 + dx^2 - \delta x + p = 0$$
$$\text{oder } x^3 - dx^2 + \delta x + p = 0$$

III. Wenn zwei negativ, und eine positiv,

d. i. $x = a$
$x = -b$
$x = -c.$

$$x^3 + fx^2 \mp gx - p = 0$$
$$\text{oder } x^3 - fx^2 - gx - p = 0$$

IV. Wenn alle drei Wurzeln negativ sind,

d. i. $x = -a$
$x = -b$
$x = -c.$

$$x^3 + hx^2 + mx + p = 0.$$

Hieraus geht die Regel hervor:

„So viele Abwechslungen der Zeichen in einer Gleichung vorkommen, eben so viele positive Wurzeln hat die Gleichung. So viele Wiederholungen des nämlichen Zeichens aber, eben so viele negative Wurzeln hat dieselbe.“ Für diese Regel muß aber vorausgesetzt werden, daß alle Wurzeln reelle Größen sind.

* Man habe die Gleichung: $x^3 + 5x2 + 2x - 8 = 0.$

Die Faktoren von 8 sind: 1, 2, 4, 8.

Da in dieser Gleichung zwei Wiederholungen, und nur eine Abwechselung der Zeichen vorkommt, so sind zwei Wurzeln negativ, und eine positiv. — Man substituire:

$x = 1$	$1 + 5 + 2 - 8 = 8 - 8 = 0.$
$x = -2$	$-8 + 20 - 4 - 8 = 20 - 20 = 0.$
$x = -4$	$-64 + 80 - 8 - 8 = 80 - 80 = 0.$

§. 166.

Die erste Methode also, unreine kubische Gleichungen aufzulösen, wird durch folgende Regeln bestimmt:

I. Man bringt die Gleichung auf die Form einer geordneten Gleichung. §. 165. Zus. II.

II. Zerfällt das letzte Glied p in seine Faktoren.

III. Substituirt in der Gleichung für die unbekannte Größe einen dieser Faktoren nach dem andern, sowohl positiv, als negativ.

IV. Wird dann durch einen oder durch mehrere die Gleichung $= 0$, so sind diese die Wurzeln der Gleichung.

V. Im entgegengesetzten Falle hat die Gleichung gar keine rationalen Wurzeln.

VI. Die irrationalen oder imaginären Wurzeln findet man, wenn man die Gleichung durch den rationalen Faktor, z. B. $x - a = 0$, dividirt, und den entstehenden Quotus als eine quadratische Gleichung behandelt. — Daß man auf diese Art auch rationale und reelle Wurzeln finde, wurde schon §. 164 gesagt.

Beispiel. Welches sind die drei Wurzeln der Gleichung:

$$x^3 - 14x^2 + 45x = 50.$$

Operation. $x^3 - 14x^2 + 45x - 50 = 0.$

Faktoren von 50 sind: 1, 2, 5, 10.

Davon sind 1, 2, offenbar zu klein:

$$125 - 350 + 225 - 50 = 350 - 400$$
$$1000 - 1400 + 450 - 50 = 1450 - 1450 = 0.$$

Also $x = 10$

und $x - 10 = 0.$

$$\frac{x^3 - 14x^2 + 45x - 50}{x - 10} = x^2 - 4x + 5 = 0.$$

$$x^2 - 4x = -5$$

Kompl. $x^2 - 4x + 4 = -1$

$\surd$ $x - 2 = \pm\surd -1$

$$x = 2 + \surd -1$$
$$x = 2 - \surd -1.$$

Es sind also die drei Wurzeln:

$$x = 10$$
$$x = 2 + \surd -1$$
$$x = 2 - \surd -1.$$

§. 167.

Rechnungsvortheile.

I. Wenn bei x^3 ein Koeffizient, z. B. a, steht, der, wenn man ihn durch die Division hinwegschafft, nicht bei jedem Gliede

eine ganze Zahl zum Quotus gibt, so muß man die Wurzel vergrößern, und setzen: $ax = y$

$$x = \frac{y}{a}.$$

Enthalten aber mehrere Glieder Fraktionen eines verschiedenen Nenners, so suche man dafür den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner, und setze ihn = a.

Z. B. $ax^3 - bx^2 - \pi x - p = 0.$

$$x = \frac{y}{a}.$$

Folglich $x^3 - \frac{bx^2}{a} - \frac{\pi x}{a} - \frac{p}{a} = 0$

$$= \frac{y^3}{a^3} - \frac{by^2}{a^3} - \frac{\pi y}{a^2} - \frac{p}{a} = 0.$$

$a^3 \times \quad y^3 - by^2 - a\pi y - a^2 p = 0.$

$\therefore x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 5x - \frac{3}{2} = 0.$

$x = \frac{y}{2}$ so entsteht

$$= y^3 - 9y^2 + 20y - 12 = 0.$$

Die Faktoren von 12 sind = 1, 2, 3, 4, 6, 12.

$y = 1$	$1 - 9 + 20 - 12 = 0$
$y = 2$	$8 - 36 + 40 - 12 = 0$
$y = 6$	$216 - 324 + 126 - 12 = 336 - 336 = 0.$

Es sind also die drei Wurzeln für x:

$x = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$x = \frac{2}{2} = 1$

$x = \frac{6}{2} = 3.$

Schneller erreicht man diesen Zweck, nämlich Brüche aus einer kubischen oder jeder andern höhern Gleichung hinwegzuschaffen, ohne dem ersten Gliede einen andern Koeffizienten, als 1, zu geben, in folgender Art. Man schreibe unter die einzelnen Glieder der geordneten Gleichung eine Potenzenreihe von jener Zahl = a, welche in einem oder mehrern Gliedern als Nenner vorkommt, oder für alle Brüche kleinster gemeinschaftlicher Nenner ist, oder in deren ersten, zweiten, dritten ꝛc. Würde der Koeffizient des zweiten, dritten, vierten ꝛc. Gliedes enthalten ist, in der hier angegebenen Ordnung an; multiplizire damit die darüber

stehenden Glieder, und setze statt der in der gegebenen Gleichung stehenden unbekannten Größe eine andere: so werden die Wurzeln der neuen Gleichung das afache der Wurzeln der gegebenen seyn. Z. B.

$$x^3 - \frac{bx^2}{a} - \frac{\pi x}{a} - \frac{p}{a} = 0$$

$$\frac{1 \quad a \quad a^2 \quad a^3}{y^3 - by^2 - a\pi y - a^2 p = 0, \text{ wo } x = \frac{y}{a}}$$

$$24u^3 - 43u^2 + \frac{51u}{2} - 5 = 0 \ldots\ldots$$

$$u^3 - \frac{43u^2}{24} + \frac{51u}{48} - \frac{5}{24} = 0 \ldots\ldots$$

$$\frac{1 \;,\; 24 \;,\; 24^2 \;,\; 24^3 \ldots\ldots}{y^3 - 43y^2 + 51.12y - 5.24^2 = 0 \ldots\ldots}$$

$$y^3 - 43y^2 + 612y - 2880 = 0, \text{ wo } x = \frac{y}{24}.$$

Der kleinste Faktor von 2880, welcher die Gleichung auf Null bringt, ist 12, also $y = 12$.

Dividirt man die Gleichung $y^3 - 43y^2 + 612y - 2880 = 0$ durch $y - 12 = 0$, so erhält man die quadratische Gleichung $y^2 - 31y + 240 = 0$, für welche die Wurzeln $= 16$ und 15.

Folglich sind die Wurzeln für u:

$$u = \tfrac{12}{24} = \tfrac{1}{2}$$
$$u = \tfrac{16}{24} = \tfrac{2}{3}$$
$$u = \tfrac{15}{24} = \tfrac{5}{8}.$$

Anmerkung. Sollte ein Glied der geordneten Gleichung fehlen, so setze man dafür die gehörige Würde von x mit dem Koefizienten 0. Z. B. Statt $x^3 + \frac{bx^2}{a} - \frac{c}{a^2} = 0$, setze man

$$x^3 + \frac{bx^2}{a} + 0.x - \frac{c}{a^2} = 0$$

$$\frac{1 \;,\; a \;,\; a^2 \;,\; a^3}{y^3 + by^2 - ac = 0}$$

II. Wenn das letzte Glied einer kubischen Gleichung (p) ziemlich groß, und zugleich ein Produkt von der Art ist, daß der eine Faktor desselben ein Kubus sey, $f = h^3$ oder $p = qh^3$, so kann man die Wurzel vermindern, wenn man setzt $x = hy$.

Dabei wird aber vorausgesetzt, daß auch h ein Faktor des Koeffizienten vom zweiten, und h^2 ein Faktor des Koeffizienten vom dritten Gliede sey.

Also wird aus der Gleichung

$$x^3 - hfx^2 + h^2\pi x - qh^3 = 0,$$

wenn $x = hy$,

diese: $h^3y^3 - h^3fy^2 + h^3\pi y - qh^3 = 0$,

h^3 :) $y^3 - fy^2 + \pi y - q = 0$.

Die Rechnung wird auch hier kürzer, wenn man die Glieder der Gleichung der Ordnung nach durch 1, h, h^2, h^3 dividirt.

Z. B. $x^3 - 24x^2 - 252x + 1260 = 0$.

Da hier 2160 aus zu vielen Faktoren besteht, als daß man mit allen die Probe machen sollte, und überdieß $2160 = 8.27.10$, d. h. die Faktoren desselben die Kubusse von 2 und 3 sind; so setze man $x = 6z$. Also

$$x^3 - 24x^2 - 252x + 1260 = 0$$

$$\underline{1, \quad 6, \quad 6^2, \quad 6^3}$$

$$z^3 - 4z^2 - 7z + 10 = 0$$

Diese Gleichung hat nach §. 165 zwei positive und eine negative Wurzel.

Die Faktoren von 10 sind 1. 2. 5. 10.

$z = 1$	$1 - 4 - 7 + 10 = 0$
$z = 2$	$8 - 16 - 14 + 10 = -12$
$z = -2$	$-8 - 16 + 14 + 10 = 0$
$z = 5$	$125 - 100 - 35 + 10 = 0$.

Da nun $x = 6z$, so sind die drei Wurzeln

für x . . . . $x = +6$

$x = -12$

$x = +30$.

* Dieser Rechnungsvortheil wird nur selten angewendet werden können. Für eine sehr große Zahl von Faktoren des letzten Gliedes ist der im folgenden Paragraph angegebene Vortheil wichtiger.

III. Von der allgemeinen Gleichung: $x^3 + px^2 + qx + r = 0$

sey a eine Wurzel,

also $a^3 + pa^2 + qa + r = 0$, und

$r = -(a^3 + pa^2 + qa)$, durch a dividirt:

$\frac{r}{a} = -(a^2 + pa + q)$.

Da

Da $\frac{r}{a}$ einer Summe von ganzen Zahlen gleich ist, so muß es ebenfalls eine ganze Zahl seyn. Es sey $\frac{r}{a} = b$, so wird

$$\frac{b+q}{a} = -(a+p), \text{ und}$$

daher $\frac{b+q}{a}$ = einer ganzen Zahl = c seyn. Daraus

$$c = -(a+p) \text{ oder } c+p = -a, \text{ also}$$

$$\frac{c+p}{a} = -1 = d$$

Will man demnach untersuchen, ob a eine Wurzel der Gleichung sey, so bilde man der Reihe nach die Quotienten $\frac{r}{a} = b$, $\frac{b+q}{a} = c$ und $\frac{c+p}{a} = -1$. Sind die beiden ersten Quotienten ganze Zahlen, und der letzte $= -1$, so ist a eine Wurzel der Gleichung. Daraus läßt sich auch sogleich die quadratische Gleichung ableiten, deren Wurzeln die beiden andern Wurzeln der kubischen Gleichung sind. Es ist nämlich

$$-c = a + p$$
$$-b = a^2 + pa + q$$
$$-r = a^3 + pa^2 + qa$$

Daraus findet man $(x^3 + px^2 + qx + r) : (x - a)$

$$= x^2 + (a+p)x + (a^2 + pa + q) = 0;$$

oder substituirt: $x^2 - cx - b = 0$.

Z. B. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$.

Die Faktoren 6 sind: 1, 2, 3; zwei Wurzeln sind nach den Zeichen der Glieder positiv, eine ist negativ.

Also a =	+ 1	— 1	+ 2	— 2	+ 3	— 3
$b =$	$\frac{6}{1} = 6$	$\frac{6}{-1} = -6$	$\frac{6}{2} = 3$	— 3	+ 2	— 2
$c =$	$\frac{6-5}{1} = 1$	$\frac{-6-5}{-1} = +11$	$\frac{3-5}{2} = -1$	+ 4	— 1	*
$d =$	$\frac{1-2}{1} = -1$	$\frac{11-2}{-1} = -9$	$\frac{-1-2}{2}$ *	— 1	— 1	

Die Wurzeln sind demnach + 1, — 2, + 3.

Aus der ersten Wurzel und den dazu gehörigen Quotienten ergibt sich auch unmittelbar die quadratische Gleichung:

$$x^2 - x - 6 = 0, \text{ woraus } x = \frac{1 \pm 5}{2}.$$

Eine solche quadratische Gleichung anzusetzen, ist nothwendig, wenn zwei Wurzeln irrational oder imaginär sind.

IV. Enthält endlich das letzte Glied die Zahl 1, und führt die unbekannte Größe Koeffizienten bei sich, so setze man

$$x = \frac{1}{y}.$$

Z. B. $10x^3 - 4x^2 - 5x - 1 = 0.$

$$x = \frac{1}{y}.$$

$$\frac{10}{y^3} - \frac{4}{y^2} - \frac{5}{y} - 1 = 0$$

$$y^3 \times) \; 10 - 4y - 5y^2 - y^3 = 0$$

$$\text{oder} \quad y^3 + 5y^2 + 4y - 10 = 0.$$

Da zufolge der ersten Gleichung ein Werth für y die Zahl 1 seyn muß, so dividire man mit $y - 1 = 0$.

$$\frac{y^3 + 5y^2 - 4y - 10}{y - 1} = y^2 + 6y + 10$$

$$\text{und} \quad y^2 + 6y = -10$$

$$y = -3 + \sqrt{-1}$$

$$y = -3 - \sqrt{-1}.$$

Da nun $x = \frac{1}{y}$,

so sind die Wurzeln für x:

$$x = \tfrac{1}{1} = 1$$

$$x = \frac{1}{-3+\sqrt{-1}} = \frac{-3-\sqrt{-1}}{10}$$

$$x = \frac{1}{-3-\sqrt{-1}} = \frac{-3+\sqrt{-1}}{10}.$$

Bei den zwei letzten Fraktionen kann man nämlich den Nenner rational machen, wenn man die erste mit $(-3-\sqrt{1})$, und die zweite mit $(-3+\sqrt{1})$ sowohl im Zähler als Nenner multiplizirt.

§. 168.

Ist die Anzahl der Faktoren des letzten Gliedes einer Gleichung sehr groß, so wird die Substitution sehr langwierig. Um vieles abgekürzt wird die Rechnung durch folgendes Verfahren.

Man setze statt der Unbekannten x in der gegebenen Gleichung $= A$ einmal $y+1$ und dann $y-1$; so erhält man zwei neue Gleichungen von der Art, daß die Wurzeln der erstern $= B$ um 1 kleiner, von der letztern $= C$ um 1 größer sind. Soll nun ein Faktor des letzten Gliedes von der Gleichung A eine ihrer Wurzeln seyn, so muß auch das letzte Glied in B einen Faktor enthalten, der um 1 kleiner, und das letzte Glied in C einen Faktor, welcher um 1 größer ist, als jener Faktor des letzten Gliedes in A.

Setzt man in der allgemeinen Gleichung:

A) $x^3+px^2+qx+r=0$, $x=y+1$, so ist

B) $(y+1)^3+p(y+1)^2+q(y+1)+r=0$.

Entwickelt man die einzelnen Glieder, und ordnet die Gleichung, so erhält man:

B) $$y^3 \left.\begin{matrix}+3\\+p\end{matrix}\right\} y^2 \left.\begin{matrix}+3\\+2p\\+q\end{matrix}\right\} y \left.\begin{matrix}+1\\+p\\+q\\+r\end{matrix}\right\} = 0.$$

Das letzte Glied von B kann man dieser Form nach offenbar sogleich aus der gegebenen Gleichung A finden, wenn man in dieser $x=1$ setzt, eben so von C, wenn man $x=-1$ setzt.

I. Beispiel.

A) $x^3-x^2-116x+480=0$

für $x=1$; $1-1-116+480=364$ letzt. Glied von B,

für $x=-1$; $-1-1+116+480=594$ letzt. Glied von C.

Also weder $+1$, noch -1 eine Wurzel.

Faktoren von 364 sind: 2, 4, 7, 13, ...

" " " 480 " : 2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 20, 24 . . .

" " " 594 " : 2, 3, 6, 9, 11, 18 . . . . .

Von den kleinern Faktoren des letzten Gliedes 480 sind nur 5 und 8 von der Beschaffenheit, daß sie um 1 vermindert unter den Faktoren von 364, um 1 vermehrt unter den Faktoren von 594 vorkommen; 12 gibt um 1 vermehrt den Faktor 13 von 364, um 1 vermindert den Faktor 11 von 594. Es hat aber 12 die nämliche Beziehung auch zu den zuletzt genannten Faktoren von 364 und 594, welche es zu den oben genannten hat, sobald es

negativ genommen wird: $(-12)-1=-13$ und $(-12)+1=11$. Es werden daher 5, 8 und 12 Wurzeln der Gleichung A seyn können; nur wird 12 ein anderes Zeichen erhalten müssen, als 5 und 8, was auch mit §. 165 übereinstimmt, indem aus den Zeichen der Gleichung geschlossen werden kann, daß sie zwei positive und eine negative Wurzel habe. Subſtituirt man nun nach §. 167. III. jene Zahlen mit beiden Zeichen:

$a=+5$	,	-5,	$+8$,	-8,	$+12$,	-12
$b=\frac{480}{5}=96$,		-96,	60,	-60,	40,	-40
$c=\frac{96-116}{5}=-4$,		*	-7,	$+22$,	*	$+13$
$d=\frac{-4-1}{5}=-1$,			-1	*		-1

Folglich sind $+5$, $+8$ und -12 Wurzeln der Gleichung.

II. Beiſpiel. $5x^3-12x^2-27=0$.

$$x^3-\frac{12}{5}x^2+0.x-\frac{27}{5}=0$$

$$1,\quad 5,\quad 5^2,\quad 5^3$$

$y^3-12y^2-675=0$. (Vgl. §. 167. I. Anm.)

Faktoren 675 sind: 3, 5, 9, 15, 25, 27 .....

Für $x=+1$ iſt das Polynomium $=-686$, Faktoren hiervon: 2, 7, 14, 49 ....

Für $x=-1$ iſt das Polynomium $=-688$, Faktoren hiervon: 2, 4, 8, 16

Der Faktor 15 iſt um 1 kleiner, als der Faktor 14 von 686, und um 1 größer, als der Faktor 16 von 688, kann alſo eine Wurzel der Gleichung ſeyn. Subſtituirt man nun

$$a=+15,\qquad b=\frac{-675}{15}=-45$$

$$c=\frac{-45+0}{15}=-3,\quad d=\frac{-12-3}{15}=-1;$$

mithin $x=+15$.

Die quadratiſche Gleichung iſt: $y^2+3y+45=0$,

wofür $y=\frac{-3\pm\sqrt{-19}}{2}$.

Da nun $x = \frac{y}{5}$, so sind die drei Wurzeln der gegebenen Gleichung:

$$x = \frac{15}{5} = 3$$

$$x = \frac{-3+3\sqrt{-19}}{10}$$

$$x = \frac{-3-3\sqrt{-19}}{10.}$$

§. 169.

Aus jeder kubischen Gleichung läßt sich das zweite Glied ($\pm Sx^2$) hinausschaffen, wenn man zu x noch den dritten Theil des Koeffizienten im zweiten Gliede (mit dem gegebenen Zeichen) addirt, und die Summe $= y$ setzt; z.B. man soll aus der Gleichung

$x^3 + 3x^2 - 7x - 6 = 0$ das Quadratglied entfernen.

Operation. $x + \frac{3}{3} = y$

$x + 1 = y$

$x = y - 1.$

$$x^3 = y^3 - 3y^2 + 3y - 1$$
$$+3x^2 = +3y^2 - 6y + 3$$
$$-7x = -7y + 7$$
$$-6 = -6$$

$$x^3 + 3x^2 - 7x - 6 = y^3 - 10y + 3 = 0.$$

In dieser letzten Gleichung ist 3 eine Wurzel von y.

$$\frac{y^3 - 10y + 3}{y - 3} = y^2 + 3y - 1$$

$$\text{und } y = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\text{folglich } x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Zusatz. Wollte man in eine kubische Gleichung, worin das zweite Glied fehlt, dieses hineinschaffen, so brauchte man nur $x = y \pm a$ in die Gleichung zu substituiren; dadurch würden auch die Wurzeln um a verkleinert oder vergrößert.

§. 170.

Eine allgemeine Methode, kubische Gleichungen auch in dem Falle aufzulösen, wenn sie keine rationale Wurzel, weder

in ganzen, noch gebrochenen Zahlen haben, ist folgende, deren Erfindung dem Scipio Ferreus zugeschrieben wird, welche aber unter dem Namen Cardan's Regel bekannt ist, indem sie Cardan, mit seinem Freunde Tartaglia, weiter ausbildete, und im Drucke herausgab.

Diese Methode setzt voraus, daß in der kubischen Gleichung das zweite Glied fehlt. Sollte auch dieses gegeben seyn; so müßte es vorher nach §. 169 hinweggeschafft werden.

Man habe im Allgemeinen die kubische Gleichung:

$$x^3 - \pi x - p = 0; \text{ oder } x^3 = \pi x + p.$$

Die Wurzel hiervon sey $x = a + b$.

Erhebt man nun diese Wurzel zum Kubus, so erhält man

$$x^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$= a^3 + b^3 + 3ab.(a+b).$$

Da nun $x = a + b$;

so wird, wenn man substituirt: $x^3 = a^3 + b^3 + 3abx$.

Um diese Formel auch auf solche Fälle anzuwenden, wo a^3 und b^3 nicht reine Kubusse sind, so sey

$$a^3 = k \qquad b^3 = c;$$

folglich $a = \sqrt[3]{k}$ $\qquad b = \sqrt[3]{c}$ und $3ab = 3\sqrt[3]{c.k}$.

Mithin $x^3 = 3x\sqrt[3]{c.k} + c + k$.

Wovon eine Wurzel seyn muß $a + b = \sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{k}$.

Vergleicht man nun diese Gleichung mit der ersten

$$x^3 = \pi x + p, \text{ so erkennt man,}$$

daß $\pi = 3\sqrt[3]{c.k}$ und $p = c + k$.

Folglich eine Wurzel dieser Gleichung sey

$$x = \sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{k}.$$

Nun bestimme man die Werthe für $\sqrt[3]{c}$ und $\sqrt[3]{k}$.

I. $3\sqrt[3]{c.k} = \pi$.	II. $c + k = p$.
3: $\sqrt[3]{c.k} = \frac{1}{3}\pi$.	quadrirt: $c^2 + 2ck + k^2 = p^2$
Kubirt: $c.k = \frac{1}{27}\pi^3$.	$-4ck = -\frac{4}{27}\pi^3$
$4c.k = \frac{4}{27}\pi^3$.	$c^2 - 2ck + k^2 = p^2 - \frac{4}{27}\pi^3$.
	$\sqrt{c - k} = \sqrt{p^2 - \frac{4}{27}\pi^3}$.

III. $c + k = p$.

$$\frac{c - k = \sqrt{p^2 - \frac{4}{27}\pi^3}.}{2c = p + \sqrt{p^2 - \frac{4}{27}\pi^3}.}$$

$$c = \frac{p + \sqrt{p^2 - \frac{4}{27}\pi^3}}{2}$$

$$\text{und } k = \frac{p - \sqrt{p^2 - \frac{4}{27}\pi^3}}{2}.$$

Folglich ist die verlangte Wurzel: $\sqrt[3]{c} + \sqrt[3]{k} =$

$$x = \sqrt[3]{\frac{p + \sqrt{p^2 - \frac{4}{27}\pi^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{p - \sqrt{p^2 - \frac{4}{27}\pi^3}}{2}}.$$

Man habe z. B. die Gleichung: $x^3 = 12x + 16$.

Hier ist $16 = p$ .... $12 = \pi$,

folglich $p^2 = 256$. $\pi^3 = 1728$.

$$\frac{4}{27}\pi^3 = 256.$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{16 + \sqrt{256 - 256}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{16 - \sqrt{256 - 256}}{2}}.$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{16 + \sqrt{0}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{16 - \sqrt{0}}{2}} = 2\sqrt[3]{8} = 4.$$

§. 171.

In der Cardan's-Regel erscheinen die Wurzeln der Gleichung in irrationaler, und wenn $-\frac{4\pi^3}{27} > p^2$, d. i. wenn π negativ und $4\pi^3 > 27p^2$ ist, in imaginärer Form, obwohl im letztern Falle alle drei Wurzeln reelle Größen sind.

Manchmal kann in diesem Falle die Wurzel durch gewisse Kunstgriffe herausgefunden werden.

Man habe z. B. die Gleichung:

$$x^3 = 19x - 30.$$

Hier ist $p = -30$ . . . $p^2 = 900$

$\pi = 19$ $\pi^3 = 6859$

$$\frac{4}{27}\pi^3 = 1016\frac{4}{27}.$$

$$p^2 - \frac{4}{27}\pi^3 = \frac{3136}{27}.$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{-30+\sqrt{-\frac{3136}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-30-\sqrt{-\frac{3136}{27}}}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{-30+\sqrt{+\frac{3136.\times-3}{81}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-30-\sqrt{+\frac{3136.\times-3}{81}}}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{-30+\frac{56\sqrt{-3}}{9}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-30-\frac{56\sqrt{-3}}{9}}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{-15+\frac{28\sqrt{-3}}{9}} + \sqrt[3]{-15-\frac{28\sqrt{-3}}{9}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{-405-84\sqrt{-3}}{27}} + \sqrt[3]{\frac{-405-84\sqrt{-3}}{27}}$$

$$x = \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{-405+84\sqrt{-3}} + \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{-405-84\sqrt{-3}}.$$

Nun ist in diesem Ausdrucke wirklich eine rationale Wurzel unserer Gleichung enthalten; denn beide Binomien sind reine Kubusse, indem

$$\frac{(-15+\sqrt{-3})^3}{2} = -405+84\sqrt{-3}$$

und $\frac{(-15-\sqrt{-3})^3}{2} = -405-84\sqrt{-3}$ ist.

Also $x = \frac{1}{3}\times\frac{(-15+\sqrt{-3})}{2} + \frac{1}{3}\times\frac{(-15-\sqrt{-3})}{2}$

$$x = \frac{-15-15}{6} = \frac{-30}{6} = -5.$$

Also ist eine Wurzel der gegebenen Gleichung -5.

Die beiden andern Wurzeln können durch ein ähnliches Errathen gefunden werden. Es ist nämlich

$\sqrt{3136\times-3}$ auch $= 7\sqrt{-192}$
oder $= 8\sqrt{-147}$.

Hieraus ergeben sich denn folgende Werthe für x.

1) $x = \frac{1}{6}\sqrt[3]{-3240+84\sqrt{-192}} + \frac{1}{6}\sqrt[3]{-3240-84\sqrt{-192}}.$

Da aber $\sqrt[3]{(-3240+84\sqrt{-192})} = 6-\sqrt{-192}$

und $\sqrt[3]{(-3240-84\sqrt{-192})} = 6+\sqrt{-192}$;

so wird $x = \frac{6+\sqrt{-192}+6-\sqrt{-192}}{6} = 2.$

2) $x = \frac{1}{3}\sqrt[3]{-405+12\sqrt{-147}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{-405-12\sqrt{-147}}$

$$x = \tfrac{1}{3}\left[\frac{9+\sqrt{-147}}{2}\right] + \tfrac{1}{3}\left[\frac{9-\sqrt{-147}}{2}\right]$$

$$= \frac{18}{6} = 3.$$

Anmerkung 1. Man kann zwar Ausdrücke, wie $\sqrt[3]{m+n\sqrt{-1}}$ $= (m+n\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$ und $\sqrt[3]{m-n\sqrt{-1}} = (m-n\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$ nach dem binomischen Lehrsatze in unendliche Reihen auflösen, in welchen die unmöglichen Größen entgegengesetzte Zeichen erhalten, und sich bei der Summirung der beiden Reihen aufheben; allein immer bleibt die Rechnung sehr schwierig. Deßhalb findet diese Auflösungsmethode jetzt wenig Anwendung mehr. Leichter findet man die rationalen Wurzeln nach §. 168 in Verbindung mit §. 167. III., die irrationalen nach der Näherungsmethode, wovon unten §. 186.

Anmerkung 2. Die Auflösung des s. g. casus irreducibilis, d. i. jenes Falles der Cardan's-Regel, wo reelle Wurzeln in Form von unmöglichen Größen erscheinen, durch Hülfe der Trigonometrie, gehört nicht hieher.

§. 172.

Probleme des dritten Grades (reine und unreine).

I. Man suche eine Zahl, welche zum Produkte aus ihrer Hälfte, ihrem dritten und vierten Theil 4608 gibt.

Auflösung. Die Zahl sey x.

$$\frac{x}{2} \times \frac{x}{3} \times \frac{x}{4} = 4608$$

$$\frac{x^3}{24} = 4608$$

$$x^3 = 110.592$$

$$\sqrt[3]{x} = 48.$$

II. Bei einem Baue erhält täglich jeder Mauerer so viele Kreuzer, als der Mauerer; jeder Handlanger so viele Kreuzer, als der Handlanger sind; (es haben aber je zwei Mauerer einen Handlanger). Nun arbeiten alle diese Personen schon zweimal so viele Tage, als ihre Gesammtzahl beträgt, und der Bau kostete bisher 1098 fl. 30 kr. Wie viele sind der Arbeiter von jeder Sorte?

Auflösung. Es sind x Handlanger, folglich 2x Mauerer.

kr.	?	2x M.	kr.	?	x H.	1098 fl. 30 kr.
M.	1	6x T.	H.	1	6x T.	= 65910
T.	1	2x kr.	T.	1	x kr.	Tage = 6x.
		? = $24x^3$			? = $6x^3$	

Also $30x^3 = 65910$

$x^3 = 2197$

$\sqrt[3]{\ } \quad x = 13$

Also waren es 13 Handlanger, 26 Mauerer; sie arbeiteten bereits $39 \times 2 = 78$ Tage.

III. Der kubische Inhalt eines Zimmers, welches um 6 Fuß breiter als hoch, und um 7 Fuß länger als breit ist, beträgt 7560 Kubikfuß. Man bestimme hieraus die drei Dimensionen.

Auflösung. Die Höhe sey x, so ist die Breite $x + 6$, die Länge $x + 13$ Fuß.

$$x \times x + 6 \times x + 13 = x^3 + 19x^2 + 78x.$$

Also: $x^3 + 19x^2 + 78x = 7560$, oder

$x^3 + 19x^2 + 78x - 7560 = 0.$

Die Gleichung hat nur einen Zeichenwechsel, mithin nur eine positive Wurzel, x nur einen Werth, welcher den Bedingungen obiger Aufgabe Genüge leistet.

Faktoren von 7560 sind: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 13, 14, 15, 20....;
für $x = 1$ ist das Polynomium $= -7462$; hiervon die Faktoren:
2, 7, 13....;
für $x = -1$ ist das Polynomium $= -7620$; hiervon die Faktoren:
2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15....

Es kann also der Faktor 14 der Zahl 7560 eine Wurzel seyn, da sich unter den Faktoren von 7462 die Zahl $14 - 1 = 13$,

und unter denen von 7620 die Zahl $14+1=15$ findet. Nun substituirt, so ist

$$a = 14, \qquad b = \frac{-7560}{14} = -540.$$

$$c = \frac{-540+78}{14} = -33, \quad d = \frac{-33+19}{14} = -1.$$

Daher $x = 14$ die Höhe des Zimmers.

Folglich die Breite $= 20$, die Länge $= 27$ Fuß.

Probe. $14 \times 20 \times 27 = 280 \times 27 = 7560$.

Aus den Quotienten ergibt sich die quadratische Gleichung:

$$x^2 + 33x + 540 = 0 \quad . \quad . \quad .$$

$$x^2 + 33x + \left(\frac{33}{2}\right)^2 = -\frac{1071}{4}$$

$$x = \frac{-33 \pm \sqrt{-1071}}{2}.$$

Also hat die Gleichung nur eine rationale Wurzel, nämlich 14.

IV. Einige Kaufleute hatten zu einer gemeinschaftlichen Unternehmung 21900 fl. zusammengelegt, und diese Summe ein jeder um eben so viele Hunderte vermehrt, als ihrer Personen waren. Mit diesem Gelde machten sie einen Gewinn von eben so viel Prozent, als ihrer Köpfe waren. Und wiewohl sie von dem gemeinschaftlichen Gewinne jeder 26mal so viele Gulden, als Personen waren, abgezogen hatten, so waren doch noch 594 fl. übrig.

Aus wie vielen Personen war die Gesellschaft bestanden?

Auflösung. Es waren x Personen. Zur ersten Summe legte eine $100x$; alle zusammen $100x^2$. Dieses verinteressirt zu x Prozent, gibt:

?	$21900 + 100x^2$
100	x

$$? = 219x + x^3.$$

Davon zogen sie alle ab: $(26x) \times x = 26x^2$; also:

$$x^3 - 26x^2 + 219x = 594$$

$$x^3 - 26x^2 + 219x - 594 = 0.$$

Die Faktoren von 594 sind: 2, 3, 6, 11, 22, 33 u. s. w.

Die ersten zwei sind offenbar zu klein; man versuche die nächsten:

$$(x = 6);\quad 216 - 936 + 1314 - 594 = 0.$$
$$(x = 9);\quad 729 - 2106 + 1971 - 594 = 0.$$
$$(x = 11);\quad 1331 - 3146 + 2409 - 594 = 0.$$

Es waren also 6, 9 oder 11 Kaufleute.

Probe.

Zahl der Kaufleute.	I. 6	II. 9	III. 11
Vorläufige Summe	21900	21900	21900
Dazu legte ein Jeder $100x$ . .			
folglich alle $100x^2$	3600	8100	12100
Folglich das ganze Kapital . . .	25500	30000	34000
Damit gewinnen sie so viele Prozente,			
als der Personen sind . . .	1530	2700	3740
Hievon nimmt ein Jeder $26x$			
alle . . . . . $26x^2$.	936	2106	3146
Rest	594	594	594

Fünfter Artikel.

Biquadratische Gleichungen.

§. 173.

Biquadratisch, oder Gleichung des vierten Grades heißt diejenige Gleichung, worin die unbekannte Größe in der vierten Potenz vorkommt. — Auch diese Gleichungen sind entweder rein, oder unrein, welche Begriffe für sich schon klar sind.

Die Form der reinen biquadratischen Gleichungen ist

$$x^4 = Q$$
$$x = \sqrt[4]{Q}$$
oder $$x = \sqrt{\sqrt{Q}}.$$

D. h. Man ziehe aus Q die Quadratwurzel, und diese sey z. B. = R. Aus dieser ziehe man noch einmal die Wurzel, und so hat man einen Werth der biquadratischen Gleichung für x.

Z. B. $x^4 = 33362176$.

$x^2 = \sqrt{33362176} = 5776$.

$x = \sqrt{5776} = 76$.

§. 174.

Jede biquadratische Gleichung, sowohl reine als unreine, hat viererlei Werthe, welches für die reinen also gezeigt wird. — Man habe die Gleichung $x^4 = p^4$.

Man ziehe hieraus die Quadratwurzel, so ergibt sich

$$x^2 = \pm\sqrt{p^4} = \pm p^2,$$

also $x^2 = +p^2$

und $x^2 = -p^2$.

Zieht man hieraus noch einmal die Wurzel, so ergeben sich die vier Werthe für x:

$x = \pm\sqrt{p^2}$	$x = \pm\sqrt{-p^2}$
1) $x = +p$	3) $x = +\sqrt{-p^2}$
2) $x = -p$	4) $x = -\sqrt{-p^2}$.

§. 175.

Biquadratische Gleichungen, welche die Form haben:

$$x^4 \pm Sx^2 \pm p = 0$$

oder $x^4 \pm Sx^2 = \mp p$,

lassen sich ganz als quadratische behandeln; man setze nämlich $x^2 = y$; so erhält man

$$y^2 \pm Sy = \mp p$$

$$y^2 \pm Sy + \tfrac{1}{4}S^2 = \frac{\mp 4p + S^2}{4}$$

$$y = \frac{\mp S \pm \sqrt{\mp 4p + S^2}}{2}$$

folglich $x = \pm\sqrt{\frac{\pm S \pm \sqrt{\pm 4p + S^2}}{2}}$. (Vgl. §. 159.)

§. 176.

Die Form einer vollständigen geordneten biquadratischen Gleichung ist:

$$x^4 \pm sx^3 \pm Sx^2 \pm \Sigma x \pm P = 0.$$

Hiervon seyen die vier Wurzeln:

$$\begin{aligned} x &= \delta \quad \text{also} \quad x - \delta = 0 \\ x &= \lambda \qquad\quad x - \lambda = 0 \\ x &= \mu \qquad\quad x - \mu = 0 \\ x &= \pi \qquad\quad x - \pi = 0. \end{aligned}$$

Das Produkt aus diesen vier Wurzeln ist:

$$x^4 - (\delta + \lambda + \mu + \pi)x^3 + (\delta\lambda + \delta\mu + \delta\pi + \lambda\mu + \lambda\pi + \mu\pi)x^2 - (\delta\lambda\mu + \delta\lambda\pi + \delta\mu\pi + \lambda\mu\pi)x + \delta\lambda\mu\pi = 0.$$

Vergleicht man diese Aequation mit der vorigen; so ergibt sich, daß

$$\begin{aligned} s &= \delta + \lambda + \mu + \pi \\ S &= \delta\lambda + \delta\mu + \delta\pi + \lambda\mu + \lambda\pi + \mu\pi \\ \Sigma &= \delta\lambda\mu + \delta\lambda\pi + \delta\mu\pi + \lambda\mu\pi \\ P &= \delta\lambda\mu\pi, \end{aligned}$$

d. h., daß

1) der Koeffizient des zweiten Gliedes die Summe der einfachen Wurzeln;
2) der Koeffizient des dritten Gliedes die Summe der Produkte aus je zwei Wurzeln;
3) der Koeffizient des vierten Gliedes die Summe der Produkte aus je drei Wurzeln;
4) das letzte Glied endlich das Produkt der vier Wurzeln enthalte; wenn man die Wurzeln mit entgegengesetzten Zeichen nimmt.

Zugleich erkennt man hieraus, daß eine biquadratische Gleichung keine andere rationale Wurzel habe, als welche ein Faktor der Größe P ist. — Sie kann auch unmögliche Wurzeln, diese aber immer nur paarweise und von der Form: $m + n\sqrt{-1}$ und $m - n\sqrt{-1}$ haben; mithin können auch alle Wurzeln unmögliche Größen seyn. — Sind alle Koeffizienten ganze Zahlen, so können die Wurzeln keine rationalen Brüche seyn. Vgl. §. 164.

§. 177.

Die erste Art, biquadratische Gleichungen aufzulösen, ist demnach folgende:

I. Man ordne die Gleichung. (§. 176).

II. Suche einen schicklichen Faktor der Größe P, welcher die Gleichung $= 0$ macht.

III. Mit diesem Faktor dividire man die ganze Gleichung, bringe sie auf eine kubische, und behandle sie nach den schon gegebenen Regeln.

IV. So viele Abwechselungen der Zeichen vorkommen, eben so viele positive Wurzeln hat die Gleichung; im Gegentheile aber so viele negative, als Wiederholungen des nämlichen Zeichens vorkommen; — lauter reelle Wurzeln voraus gesetzt.

Man habe die Gleichung:

$$x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x - 18 = 0.$$

In dieser Gleichung kommen drei Abwechselungen der Zeichen, und eine Wiederholung vor. Die Gleichung hat also drei positive und eine negative Wurzel.

Die Faktoren von 18 sind: $\pm$ 1, 2, 3, 6, 9, 18.

$x = 1$	$1 - 3 - 7 + 27 - 18 = 28 - 28 = 0$
$x = -1$	$+ 1 + 3 - 7 - 27 - 18 = 4 - 52 = -48$
$x = 2$	$16 - 24 - 28 + 54 - 18 = 70 - 70 = 0$
$x = 3$	$81 - 81 - 63 + 81 - 18 = 162 - 162 = 0$
$x = -3$	$+ 81 + 81 - 63 - 81 - 18 = 162 - 162 = 0.$

Die vier Wurzeln dieser Gleichung sind also:

$$x = +1$$
$$x = +2$$
$$x = +3$$
$$x = -3.$$

V. Bei Auflösung der biquadratischen durch Zerfällung des letzten Gliedes in seine Faktoren kann die nämliche Abkürzung und aus den nämlichen Gründen angewendet werden, welche bei Auflösung der kubischen Gleichung §. 167. III. und §. 168 angegeben worden sind.

Man habe die Gleichung:

$$x^4 - 7x^3 - 27x^2 + 97x + 440 = 0 \ldots\ldots (A$$

Diese Gleichung kann zwei positive und zwei negative Wurzeln haben, welche unter den Faktoren von 440: 2, 4, 5, 8, 10, 11, 20, 22, 40, 44, 80 ... enthalten sind. Setzt man $x = +1$, so erhält man 504 als das letzte Glied einer Gleichung B, deren Wurzeln um 1 kleiner sind, als die von A; setzt man $x = -1$, so erhält man 324 als das letzte Glied einer Gleichung C, deren Wurzeln um 1 größer sind, als die von A. Die Faktoren

von 504 sind: 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 21, 24, 28 ...
von 324 sind: 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 ...

Die Faktoren 5 und 8 von 440 sind von der Art, daß sie sich, um 1 vermindert, unter den Faktoren von 504, und, um 1 vermehrt, unter denen von 324 befinden; 5 und 8 können daher Wurzeln der Gleichung A seyn. Nun substituirt:

$a =$	$+5$	-5,	$+8$
$b =$	$\frac{440}{5} = 88$,	-88,	55
$c =$	$\frac{88+97}{5} = 37$,	$*$,	19
$d =$	$\frac{37-27}{5} = 2$,	,	-1
$e =$	$\frac{2-7}{5} = -1$,	,	-1.

Es sind also $+5$ und $+8$ Wurzeln der Gleichung A. Dividirt man A durch $(x-5)(x-8) = x^2 - 13x + 40 = 0$, so erhält man zum Quotienten die quadratische Gleichung: $x^2 + 6x + 11 = 0$, wofür $x = -3 \pm \sqrt{-2}$. Dieß sind auch die beiden andern Wurzeln von A.

§. 178.

Da diese Versuche, um schickliche Faktoren für x zu finden, nur in solchen Fällen passen, wo die Gleichung eine rationale Wurzel hat; so hat man andere Wege entdeckt, biquadratische Gleichungen aufzulösen. Es sind dieses theils spezielle Regeln für einzelne Fälle, nämlich für sogenannte reziproke Gleichungen,

gen, d. i. für solche Gleichungen, in welchen die Koeffizienten vorwärts eben so fortgehen, als rückwärts, und in denen, wenn eine ihrer Wurzel $= a$, die andere $= \frac{1}{a}$ ist; theils allgemeine Auflösungen von was immer für biquadratischen Gleichungen; theils Näherungs-Methoden.

I. Spezieller Fall.

Wenn in einer reziproken biquadratischen Gleichung das zweite und vorletzte Glied gleiche Zeichen haben, z. B. in der Gleichung $x^4 \pm Ax^3 \pm Bx^2 \pm Ax + 1 = 0 \ldots\ldots (\alpha$

oder noch allgemeiner

$$x^4 \pm Amx^3 \pm Bm^2x^2 \pm Am^3x + m^4 = 0 \ldots\ldots (\beta$$

so läßt sich das Polynomium jeder solchen Gleichung als eine komplexe Größe betrachten, deren Faktoren

$$(x^2 + Cmx + m^2) \times (x^2 + Dmx + m^2),$$

also, gleich 0 gesetzt, quadratische Gleichungen sind, deren jede eine doppelte Wurzel enthält. Nur kommt es darauf an, die Buchstaben C und D so zu bestimmen, daß das Produkt aus diesen Faktoren, nämlich:

$$x^4 + (C+D)mx^3 + (CD+2)m^2x^2 + (C+D)m^3x + m^4 = 0$$

der obigen Gleichung (β vollkommen gleich werde; dieß geschieht offenbar, wenn $C + D = A$

$CD + 2 = B$ oder $CD = B - 2$ ist.

Nun bestimme man die Werthe für C und D.

$$(C+D)^2 = A^2$$
$$-4CD = -4B + 8$$

$$C^2 - 2CD + D^2 = A^2 - 4B + 8.$$

$$C - D = \sqrt{A^2 - 4B + 8}.$$

Aber $C + D = A$

Folglich $C = \frac{A + \sqrt{A^2 - 4B + 8}}{2}$

$$D = \frac{A - \sqrt{A^2 - 4B + 8}}{2}.$$

Beispiele.

I. $x^4 - 5x^3 - 12x^2 - 5x + 1 = 0.$

Auflösung. Hier ist $A = -5.$ $B = -12.$ $\Big\}\ m = 1.$

$$C = \frac{-5+\sqrt{25+48+8}}{2} = \frac{-5+9}{2} = 2.$$

$$D = \frac{-5-\sqrt{81}}{2} = \frac{-14}{2} = -7.$$

Die zwei Faktoren der Gleichung sind also:

$(x^2 + 2x + 1)$ und $(x^2 - 7x + 1)$

Hieraus ergeben sich folgende vier Wurzeln:

1) $x^2 + 2x = -1$

$x^2 + 2x + 1 = 1 - 1 = 0$

$x = -1$

und $x = -1.$

2) $x^2 - 7x = -1$

$x^2 - 7x + (\frac{7}{2})^2 = \frac{45}{4}$

$x = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$

$x = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}.$

*Um die Probe zu machen, multiplizire man die gefundenen zwei Faktoren durcheinander; das Produkt gibt die vorige biquadratische Gleichung.

** Hier ist eine Wurzel $a = -1$, und eine andere $\frac{1}{a} = \frac{1}{-1} = -1$; eine $b = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$, die reziproke von dieser $= \frac{2}{7+3\sqrt{5}} = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}$. (Vgl. §. 101).

II. $x^4 + 9x^3 + 36x^2 + 81x + 81 = 0 \ldots .$ (γ

Auflösung.

Diese Gleichung läßt sich, wenn man $m^4 = 81$ $m = 3$ setzt, also ausdrücken:

$x^4 + 3 \cdot 3x^3 + 4 \cdot 9x^2 + 3 \cdot 27x + 81 = 0.$

Hier ist $A = 3.$ $B = 4.$ $m = 3.$

Also $C = \frac{3+\sqrt{9-16+8}}{2} = \frac{3+1}{2} = 2.$

$D = \frac{3-\sqrt{1}}{2} = 1.$

Die beiden Faktoren sind also:

1) $x^2 + Cmx + m^2 = x^2 + 6x + 9 = 0.$
2) $x^2 + Dmx + m^2 = x^2 + 3x + 9 = 0.$

Die Wurzeln für x werden:

$x = -3.$	$x = \frac{-3+3\sqrt{-1}}{2}.$
$x = -3.$	$x = \frac{-3-3\sqrt{-1}}{2}.$

* Wenn man in der Gleichung (γ .... $x = 3y$, in der Gleichung (β .... $x = my$ setzt, so wird die dadurch erhaltene Gleichung δ, oder ε die Form der Gleichung (α erhalten, und die Wurzeln von δ ... $y = \frac{x}{3}$ und von β .... $y = \frac{x}{m}$ werden die bezeichnete Beziehung zu einander haben, (werden reziprok seyn). Dividirt man z. B. jede Wurzel von (γ durch 3, so stehen die erste und zweite, eben so die dritte und vierte in der Beziehung von a und $\frac{1}{a}$.

III. $x^4 - 8x^3 - 12x^2 - 32x + 16 = 0.$

Auflösung. $m^4 = 16$; also $m = 2.$

$x^4 - 4 . 2x^3 - 3 . 4x^2 - 4 . 8x + 16 = 0.$

$A = -4.$ $B = -3.$ $m = 2.$

Daher $C = 1.$ $D = -5.$

Die zwei Faktoren der biquadratischen Gleichung sind also:

$$x^2 + 2x + 4 = 0$$
$$x^2 - 10x + 4 = 0.$$

Die Wurzeln daraus:

$x = -1 + \sqrt{-3}$	$x = 5 + \sqrt{21}$
$x = -1 - \sqrt{-3}$	$x = 5 - \sqrt{21}.$

§. 179.

II. Spezieller Fall.

Wenn in einer reziproken biquadratischen Gleichung das zweite und vorletzte Glied verschiedene Zeichen haben, z. B. in der Gleichung: $x^4 \mp Amx^3 \pm Bm^2x^2 \mp Am^3x + m^4 = 0$; so läßt sich dieselbe als ein Produkt folgender Faktoren: $(x^2 + Cmx - m^2) \times (x^2 + Dmx - m^2) = 0$, darstellen.

Denn das Produkt aus diesen Faktoren:

$$x^4+(C+D)mx^3+(CD-2)m^2x^2-(C+D)m^3x+m^4=0,$$

ist mit der obigen Gleichung ganz einerlei, wenn

$$C+D=A$$
$$CD=B+2.$$

Aus welchen Gleichungen sich, analog mit dem Verfahren im vorhergehenden §., ergibt:

$$C=\frac{A+\sqrt{A^2-4B-8}}{2}.$$
$$D=\frac{A-\sqrt{A^2-4B-8}}{2}.$$

Beispiele.

I. $x^4+7x^3+10x^2-7x+1=0.$

Auflösung. Hier ist $A=7.\quad B=10.\quad m=1.$

$$C=\frac{7+\sqrt{49-40-8}}{2}=\frac{7+1}{2}=4$$
$$D=\frac{7-\sqrt{49-40-8}}{2}=\frac{7-1}{2}=3.$$

Die zwei Faktoren dieser Gleichung sind also:

$$(x^2+4x-1) \text{ und } (x^2+3x-1).$$

Daraus ergeben sich die vier Wurzeln:

1) $x=-2+\sqrt{5}.$
2) $x=-2-\sqrt{5}.$
3) $x=\frac{-3+\sqrt{13}}{2}.$
4) $x=\frac{-3-\sqrt{13}}{2}.$

II. $x^4-15x^3-375x+625=0.$

Auflösung. Hier ist $m^4=625$ und $m=5,$

also $x^4-3.5x^3+3.125x+625=0.$

Also $A=-3.\quad B=0.$

Folglich $C=\frac{-3+1}{2}=-1.\quad D=\frac{-3-1}{2}=-2.$

Die zwei Faktoren der biquadratischen Gleichung sind also:

$$(x^2-5x-25)\times(x^2-10x-25).$$

Daraus ergeben sich die vier Wurzeln:

1) $x = \frac{5+5\sqrt{5}}{2}$.

2) $x = \frac{5-5\sqrt{5}}{2}$.

3) $x = 5+5\sqrt{2}$.

4) $x = 5-5\sqrt{1}$.

* Das §. praec. rücksichtlich der Beziehung zweier Wurzeln zu einander Bemerkte gilt auch hier.

§. 180.

Die zweite, allgemeine Methode, biquadratische Gleichungen aufzulösen, ist die sogenannte Regel des Bombelli,*) und besteht in Folgendem:

Man setze die allgemeine Formel biquadratischer Gleichungen: $x^4 + sx^3 + Sx^2 + \Sigma x^1 + P = 0$, worin die Buchstaben s, S, Σ, P alle möglichen, positiven und negativen Zahlen bedeuten können, sey einerlei mit der:

$$(x^2 + \tfrac{1}{2}sx + A)^2 - (Bx + C)^2 = 0$$

wobei es nur darauf ankommt, die Buchstaben A, B, C so zu bestimmen, daß die obige Gleichung herauskomme.

Nun erhebe man die beiden Formeln zu den angezeigten Würden, so erhält man:

$$x^4 + sx^3 + \tfrac{1}{4}s^2x^2 + sAx + A^2$$
$$+ 2Ax^2 - 2BCx - C^2$$
$$- B^2x^2.$$

Die ersten zwei Glieder sind die nämlichen, wie in der obigen Gleichung; man setze nun, nach unserer Annahme:

$S = \frac{1}{4}s^2 + 2A - B^2$ das ist $B^2 = \frac{1}{4}s^2 + 2A - S$.

$\Sigma = s.A - 2BC$. — — $2BC = s.A - \Sigma$.

$P = A^2 - C^2$ . . . . — — $C^2 = A^2 - P$.

Aus diesen drei Gleichungen bestimme man die Werthe der Buchstaben A, B, C, welches am kürzesten also geschehen kann:

---

*) Rafaële Bombelli schrieb im Jahre 1589 eine Algebra in italienischer Sprache, worin er nicht nur die Cardan'sregel zur Auflösung der kubischen Gleichungen näher erklärte, sondern auch zeigte, wie man die biquadratischen Gleichungen, mittelst der kubischen, auf zwei quadratische reduziren könne; doch gibt Bombelli als Erfinder der letztern Methode den Luigi di Ferrara an.

$$1)\quad B^2 = \tfrac{1}{4}s^2 + 2A - S$$
$$4\times\quad 4B^2 = s^2 + 8A - 4S$$
$$\times\quad C^2 = A^2 - P.$$

$$4B^2C^2 = 8A^3 + (s^2 - 4S)A^2 - 8PA - P(s^2 - 4S).$$

$$2)\quad 2BC = sA - \Sigma$$
$$\text{quadr.}\quad 4B^2C^2 = s^2A^2 - 2s.A.\Sigma + \Sigma^2.$$

Stellt man nun diese zwei Werthe von $4B^2C^2$ zusammen, so erhält man:

$$8A^3 - 4SA^2 + (2s\Sigma - 8P)A - s^2P + 4SP - \Sigma^2 = 0.$$

Nun substituire man in dieser Gleichung für s, S, Σ, P die gegebenen Zahlen, und suche die drei Werthe für A nach den bekannten Regeln. Hat man auch nur einen Werth von A gefunden, (indem die andern zwei irrational seyn können) so lassen sich auch die Buchstaben B und C bestimmen.

$$\text{Denn } B = \sqrt{\tfrac{1}{4}s^2 + 2A - S}.$$
$$C = \frac{s.A - \Sigma}{2B}.$$

Hat man diese Werthe für A, B, C gefunden, so gibt die obige Aequation $(x^2 + \frac{1}{2}sx + A)^2 - (Bx + C)^2 = 0$,

oder $(x^2 + \frac{1}{2}sx + A)^2 = (Bx + C)^2$

$$\surd\qquad x^2 + \tfrac{1}{2}sx + A = \pm(Bx + C),$$

folgende Wurzeln:

$$1)\quad 2)\ldots x^2 + (\tfrac{1}{2}s - B)x = -A + C.$$
$$3)\quad 4)\ldots x^2 + (\tfrac{1}{2}s + B)x = -A - C.$$

Beispiele.

I. $x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 4x + 40 = 0.$

Auflösung. Hier ist $s = 4,\ S = 2,\ \Sigma = 4,\ P = 40.$

Folglich: $8A^3 - 8A^2 - 288A - 336 = 0.$

$$8 : A^3 - A^2 - 36A - 42 = 0.$$

Die Faktoren von 42 sind 1, 2, 3, 6, 7, 14.

Diese kubische Gleichung hat, wie man aus den Zeichen sieht, nur eine positive und zwei negative Wurzeln. Eine Wurzel ist + 7. Denn $343 - 49 - 252 - 42 = 0$ (die beiden übrigen sind $-3 \pm \sqrt{3}$, also irrational).

Also $A = 7.$

Folglich $B = \sqrt{\tfrac{1}{4}s^2 + 2A - S} = \sqrt{4 + 14 - 2} = \sqrt{16} = 4.$

$$C = \frac{sA - \Sigma}{2B} = \frac{28 - 4}{8} = 3.$$

Hieraus erhalten wir:

1) $x^2 - 2x = -4.$
2) $x^2 + 6x = -10.$

Die vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung sind also:

$$x = 1 + \sqrt{-3}.$$
$$x = 1 - \sqrt{-3}.$$
$$x = -3 + \sqrt{-1}.$$
$$x = -3 - \sqrt{-1}.$$

II. $x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x - 18 = 0.$

Auflösung. Hier ist $s = -3$, $S = -7$,
$\Sigma = +27$, $P = -18.$

Also $8A^3 + 28A^2 - 18A - 63 = 0.$

$$A = \frac{y}{2}.$$

$$y^3 + 7y^2 - 9y - 63 = 0.$$

Die Faktoren von 63 sind: $\pm$ 1, 3, 7, 9.

$y = +3$	$27 + 63 - 27 - 63 = 0.$
$y = -3$	$-27 + 63 + 27 - 63 = 0.$
$y = -7$	$-343 + 343 + 63 - 63 = 0.$

Also $A = +\frac{3}{2}$ oder $= -\frac{3}{2}$ oder $= -\frac{7}{2}$ | dann wird $\begin{cases} B = \frac{7}{2} & C = -\frac{9}{2}. \\ B = \frac{5}{2} & C = -\frac{9}{2}. \\ B = \frac{3}{2} & C = -\frac{11}{2}. \end{cases}$

Aus jedem dieser Werthe von A, B, C ergeben sich die vier Wurzeln unserer Gleichung.

1) $A = +\frac{3}{2}$ ... $x^2 - 5x = -6$ $x = \frac{5 \pm 1}{2}.$	$x^2 + 2x = 3.$ $x = -1 \pm 2.$
2) $A = -\frac{3}{2}$ $x^2 - 4x = -3$ $x = 2 \pm 1.$	$x^2 + x = \frac{24}{4}.$ $x = \frac{-1 \pm 5}{2}.$
3) $A = -\frac{7}{2}$ $x^2 - 3x = -2$ $x = \frac{3 \pm 1}{2}.$	$x^2 + 0x = 9$ $x = \pm 3.$

Die vier Wurzeln sind also:

$$x = 1,\ x = 2,\ x = +3,\ x = -3.$$

III. $x^4 + x^3 - 61x^2 + 111x + 108 = 0.$

Auflösung. Hier ist $s = 1$, $S = -61$, $\Sigma = 111$, $P = 108$.

Folglich $8A^3 + 244A^2 - 642A - 38781 = 0.$

Man setze $A = \frac{u}{2}$.

$$u^3 + 61 . u^2 - 321 . u - 38781 = 0.$$

Da 38781 keine andere Faktoren hat, als 9, 31, so versuche man die Probe mit 31.

$$-29.791 + 58.621 + 9951 - 38.781 = 0.$$

Also $u = 31$.

$$A = -\frac{31}{2}.$$

$$B = \sqrt{\tfrac{1}{4} . 1 - 31 + 61} = \sqrt{\tfrac{121}{4}} = \tfrac{11}{2}$$

$$C = \frac{(1 \times -\frac{31}{2}) - 111}{11} = -\tfrac{23}{2}.$$

Also 1) $x^2 - 5x = 4$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{41}}{2}.$$

2) $x^2 + 6x = 27$

$$x = -3 \pm \sqrt{36} = -3 \pm 6.$$

Die vier Faktoren der Gleichung sind demnach:

$$x = \frac{5 + \sqrt{41}}{2}$$

$$x = \frac{5 - \sqrt{41}}{2}$$

$$x = +3$$

$$x = -9.$$

Anmerkung. Außer dieser Auflösungsmethode von Bombelli haben noch zu verschiedenen Zeiten Euler, Waring, Deskartes, Pilate, Gergonne für biquadratische Gleichungen allgemeine Auflösungsarten erfunden, deren Anwendung aber immer mit mehr Schwierigkeiten verbunden ist, als die Auflösung durch Zerfällung des letzten Gliedes in Faktoren nach §. 177, und, wenn die Wurzeln irrational sind, durch Näherung. Von letzterer unten §. 186.

Sechster Artikel.

Von den höhern Gleichungen überhaupt.

I. Allgemeine Grundsätze für die höhern Gleichungen vom n^{ten} Grade.

§. 181.

1) Die allgemeine Form für die höhern Gleichungen vom n^{ten} Grade (wo $n > 1$ eine ganze Zahl seyn muß, und den Exponenten der höchsten Würde von x vorstellt), ist:

$$x^n \underline{+} Ax^{n-1} \underline{+} Bx^{n-2} \underline{+} Cx^{n-3} \underline{+} \ldots \underline{+} \ldots \underline{+} Px^0 = 0.$$

2) Jede vollständige Gleichung vom n^{ten} Grade besteht, wenn sie auf Null gebracht wird, aus $n + 1$ Gliedern.

Also die quadratische aus 3
die kubische aus . . 4
die biquadratische aus 5
} Gliedern.

3) Jede Gleichung vom n^{ten} Grade läßt sich als ein Produkt von n Faktoren darstellen, welches zugleich die Wurzeln dieser Gleichung sind.

Also hat die quadratische 2
die kubische . . . 3
die biquadratische 4
} solche Faktoren oder Wurzeln.

4) Nimmt man das Gegentheil der einzelnen Wurzeln an, so enthält der Koeffizient A von obiger Gleichung die Summe der Unionen, B die Summe der Binionen, C der Ternionen, . . . P der Komplexionen zur n^{ten} Ordnung, oder das Produkt aller Wurzeln. Der allgemeine Beweis ergibt sich aus §. 123, wenn man x statt a setzt, und unter b, c, d . . . die Wurzeln der Gleichung versteht.

5) Die Wurzeln können keine rationalen Brüche seyn, wenn die Koeffizienten ganze Zahlen sind. Hat die Gleichung unmögliche Wurzeln, so müssen diese paarweise erscheinen, von der Form: $m - n\sqrt{-1}$ und $m + n\sqrt{-1}$. (Vgl. §. 165. Zus. IV. u. V).

6) Der positiven reellen Wurzeln einer Gleichung kann es so viele geben, als darin Abwechselungen der Zeichen; — der

negativen aber so viele, als Wiederholungen des nämlichen Zeichens vorkommen. Fehlt ein Glied, so kann man für dessen Koeffizienten ± 0 setzen. Haben die nächsten Glieder, das vorhergehende und nachfolgende, entgegengesetzte Zeichen, so darf man in der Regel auf eine positive und negative Wurzel schließen. Haben die beiden nächsten Glieder einerlei Vorzeichen, so sind zwei Wurzeln unmöglich; denn bei dem Gebrauche des einen Vorzeichens vor 0 werden zwei positive, bei dem Gebrauche des andern zwei negative Wurzeln angezeigt; was im Widerspruche steht mit dem Satze, daß durch die Zeichen von drei aufeinanderfolgenden Gliedern die Zeichen zweier Wurzeln bestimmt werden.

7) Jede Gleichung vom n^{ten} Grade läßt sich auf den $(n-1)^{ten}$, d. i. nächst niedrigern Grad bringen, wenn man sie mit einer Wurzel . . . . . $(x \pm a = 0)$,

auf den $(n-2)^{ten}$ Grad, wenn man sie mit dem Produkte aus zwei Wurzeln . . . $(x \pm a) \times (x \pm b)$,

auf den $(n-3)^{ten}$ Grad, wenn man sie mit dem Produkte dreier Wurzeln $(x \pm a) . (x \pm b) . (x \pm c)$ dividirt.

8) Aus jeder höhern Gleichung läßt sich das zweite Glied $\pm Ax^{n-1}$ eliminiren, wenn man der unbekannten Größe x den n^{ten} Theil des Mitfaktors vom zweiten Gliede mit seinem Zeichen zugibt, und die Summe einer andern unbekannten Größe (z. B. y) gleich setzt.

$$x \pm \frac{A}{n} = y$$

$$x = y \mp \frac{A}{n}.$$

Bei quadratischen Gleichungen beträgt $\frac{A}{n}$ die Hälfte;
bei kubischen Gleichungen beträgt $\frac{A}{n}$ das Drittel;
— biquadratischen das Viertel;
— kuboquadratischen das Sechstel vom Mitfaktor des zweiten Gliedes x^{n-1}.

9) Im Gegentheile läßt sich das fehlende zweite Glied ergänzen, wenn man die unbekannte Größe + oder — eines beliebigen Zusatzes (z. B. π) einer andern unbekannten Größe, z. B. y, gleich setzt, und darnach die Gleichung umwandelt.

$$x \mp \pi = y$$
$$x = y \mp \pi$$

Durch eine solche Substitution wird eine Gleichung erhalten, deren Wurzeln um π größer oder kleiner sind, als die der gegebenen Gleichung.

10) Enthalten die Glieder einer höhern Gleichung Fraktionen,

z. B. $x^n \mp \frac{px^{n-1}}{(ab)^m} \mp \frac{qx^{n-2}}{(ab)^{m+1}} \mp \frac{rx^{n-3}}{(ab)^{m+2}} \mp \frac{Px^\circ}{(ab)^n} = 0;$

so setze man, um die Fraktionen wegzuschaffen,

$$x = \frac{y}{ab};$$

folglich $x^n = \left(\frac{y}{ab}\right)^n$, oder verfahre nach §. 167. I. Die Wurzeln der neuen Gleichung sind ab mal größer, als die der gegebenen. Setzt man $ab = -1$, oder, (was das Nämliche ist), verwandelt man die Zeichen, wenn n eine gerade Zahl ist, in den Gliedern mit ungeraden Exponenten, wenn n ungerade, in den Gliedern mit geraden Exponenten in die entgegengesetzten, so erhält man auch Wurzeln mit entgegengesetzten Zeichen.

11) Hat endlich die höhere Gleichung die Form:

$$x^n \mp a^m . px^{n-1} \mp a^{m+1} . qx^{n-2} \mp a^{m+2} . rx^{n-3} \mp \ldots \mp a^n Px^\circ = 0;$$

so setze man: $x = a^m y$, oder verfahre nach §. 167. II.*, worauf der Faktor a^m in allen Gliedern wegfällt. Die Wurzeln der dadurch erhaltenen Gleichung sind um das a^mfache kleiner, als die der gegebenen. Dieses Verfahren wendet man manchmal bei der Näherungsmethode in der Art an, daß man $a^m = 10, 100, 1000..$ setzt, oder von den Koeffizienten der Ordnung nach 1, 2, 3, 4... mal so viel Ziffern als Dezimalen abschneidet.

II. Auffindung der rationalen Wurzeln.

§. 182.

Haben Gleichungen vom fünften, sechsten Grade u. s. w. eine oder mehrere rationale Wurzeln, so können diese eben so, wie die von kubischen und biquadratischen Gleichungen, durch Zerfällung des letzten Gliedes in Faktoren und Anwendung der §. 167 III. und §. 168 angezeigten Rechnungsvortheile gefunden werden.

Ist eine Wurzel $x = a$ gefunden, so kann man die gegebene Gleichung durch $x - a = 0$ dividiren, und dadurch auf eine um einen Grad niedrigere Gleichung bringen, deren Wurzeln auch zur gegebenen Gleichung gehören. Z. B. von der Gleichung

$$x^5 + 5x^4 + 2x^3 - 17x^2 - 21x - 18 = 0$$

sind die Faktoren des letzten Gliedes $+2$ und -3 Wurzeln. Dividirt man die gegebene Gleichung durch $(x-2)(x-3) = 0$; so erhält man die kubische Gleichung $x^3 + 4x^2 + 4x + 3 = 0$, wofür eine Wurzel $x = -3$. Es gibt aber $\frac{x^3+4x^2+4x+3}{x+3}$ $= x^2 + x + 1 = 0$ die beiden letzten Wurzeln: $x = -1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}$. Daher sind die fünf Wurzeln der gegebenen Gleichung vom fünften Grade: $+2, -3, -3, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ und $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

Eine allgemeine Auflösung für Gleichungen, welche den vierten Grad übersteigen, wurde bis jetzt noch nicht gefunden. Nur Gleichungen von der Form:

$$x^{2m} + ax^m - c = 0,$$ und von der Form:

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots\ldots + bx^2 + ax^1 + 1 = 0$$

können noch allgemein gelöset werden; erstere nach Art der quadratischen (§. 160. IV.), letztere als reziproke (§. 178), wenn m nicht > 9. Ist nämlich $m = 2n$, so läßt sich die Gleichung auf eine vom n^{ten} Grade (vom vierten, dritten, oder zweiten) zurückführen; ist aber m eine ungerade Zahl, so läßt sich die Gleichung durch $x \pm 1$ dividiren, und dadurch auf eine reziproke Gleichung vom $2n^{ten}$ Grade zurückführen.

Ruffini zeigte, daß für Gleichungen, welche den vierten Grad übersteigen, eine algebraische Lösung nicht möglich sey. Dieß ist aber um so weniger zu bedauern, als solche Formeln, wenn sie gefunden wären, nur mit noch mehr Schwierigkeiten angewendet werden könnten, als die die von Cardan und Bombelli ꝛc., und sich Gleichungen aller Grade durch Zerfällung des letzten Gliedes in Faktoren oder Annäherung lösen lassen.

III. Von den Wurzelschranken.

§. 183.

Schranken oder Grenzen einer Wurzel (oder der Wurzeln) sind jene Zahlen, zwischen welche eine Wurzel (oder alle

Wurzeln) einer Gleichung hineinfällt. Bei quadratischen und kubischen Gleichungen kann man die Wurzelschranken aus allgemeinen Formen der Gleichungen dadurch bestimmen, daß man die Seiten einer Gleichung durch einseitiges Addiren, oder Subtrahiren, oder Dividiren und Multipliziren so verändert und versetzt, daß sich zwei Größen ergeben, deren eine größer, die andere kleiner als x ist, und die wir durch L = größte, und l = kleinste Schranke bezeichnen wollen. — Bei quadratischen Gleichungen ist diese Bestimmung überflüssig, da sich ihre beiden Wurzeln immer einfach nach §. 154. I. bestimmen lassen. Nothwendig ist die Bestimmung der Grenzen bei Gleichungen höherer Grade, um ihre irrationalen Wurzeln durch Näherung zu finden.

§. 184.

A) Wurzelschranken bei kubischen Gleichungen.

Um die Wurzelschranken für die kubischen Gleichungen allgemein zu bestimmen, schaffe man aus denselben das zweite oder Quadrat-Glied hinaus; dann ergeben sich folgende drei Formeln.

$$1)\quad x^3 + Sx \pm P = 0.$$
$$2)\quad x^3 - \Sigma x + P = 0.$$
$$3)\quad x^3 - sx - P = 0.$$

1) Für die erste Form sind die Wurzelschranken:

L) $x^3 + Sx = \mp P$

$x^3 < \mp P$

$x < \sqrt[3]{\mp P}$.

l) $x^3 + Sx = \mp P$.

Aber $x < \sqrt[3]{\mp P}$

$x^2 < \sqrt[3]{\mp P^2}$

$\times x)\quad x^3 < x\sqrt[3]{\mp P^2}$.

Substituirt:

$x\sqrt[3]{\mp P^2} + Sx > \mp P$

$x(S + \sqrt[3]{\mp P^2}) > \mp P$

$$x > \frac{\mp P}{S + \sqrt[3]{\mp P^2}}$$

Man habe die Gleichung: $x^3 + 5x - 42 = 0$, so ist $x < \sqrt[3]{42} = < 3{,}476$ und $x > \frac{42}{5 + 12{,}08} = > 2{,}4$. und wirklich ist eine Wurzel 3.

2) Für die zweite Form sind die Wurzelschranken:

L) $x^3 + P = \Sigma x$	1) $\Sigma x = x^3 + P.$
$x^3 < \Sigma x$	$\Sigma x > P.$
$x^2 < \Sigma$	$x > \frac{P}{\Sigma}.$
$x < \sqrt{\Sigma}.$	

Man habe die Gleichung: $x^3 - 7x + 6 = 0$,

also $x < \sqrt{7} = < 2{,}645.$

$x > \frac{6}{7}$... und so ist diese Wurzel + 1.

3) Für die dritte Form sind die Wurzelschranken:

L) $x^3 - sx = P$	1) $x^3 - P = sx$
$\frac{x^3 - sx}{x} < P$	$+ P$
$x^2 < P + s$	$x^3 > sx$
$x < \sqrt{P+s}$	$x^2 > s$
	$x > \sqrt{s}.$

Man habe die Gleichung: $y^3 - 31y - 30 = 0.$

Die Schranken sind: $y < \sqrt{61} = < 7{,}8102.$

$y > \sqrt{31} = > 5{,}567.$

Wirklich ist eine Wurzel 6.

B. Wurzelschranken und Kennzeichen reeller Wurzeln bei höhern Gleichungen überhaupt.

§. 185.

I. Wenn von einer geordneten höhern Gleichung, die wir allgemein mit $X = 0$ bezeichnen, das Polynomium X durch Substitution einer positiven Größe $p\ (= x)$ positiv, durch Substitution einer andern positiven Größe $q > p$ negativ wird; so liegt zwischen p und q wenigstens eine reelle Wurzel. Bezeichnet man nämlich die Summe der positiven Glieder der gegebenen Gleichung mit P, die der negativen mit $-N$, so wird $X = P - N = 0$ für $x = p$ muß nach der Voraussetzung $P > N$, für $x = q$... $P < N$ seyn. Da nun mit x auch P und N stätig wachsen, so muß N schneller zunehmen als P, um dieses einmal an Größe zu übertreffen; daher muß es zwischen p und q einen positiven Werth für x geben, bei welchem $P = N$ oder $X = 0$ wird. Das Nämliche gilt auch, wenn p und q negativ gesetzt werden.

Wird dann für $x = -p$ das Polynomium negativ, für $x = -q$ positiv, so liegt zwischen p und q wenigstens eine reelle negative Wurzel. Unter den angegebenen Voraussetzungen können aber zwischen p und q auch drei reelle Werthe fallen, indem bei einem stätigen Wachsen von x, nach und nach $P > N$, $P = N$, $P < N$; dann wieder $P = N$ und $P > N$; endlich $P = N$ und $P < N$ werden kann. Zwischem dem ersten $P > N$ und dem letzten $P < N$, das ist, zwischen einem Zeichenwechsel des Polynomiums X für zwei verschiedene, aber mit gleichen Zeichen versehene Werthe von x kann P dreimal $= N$ werden, kann es also drei verschiedene Wurzeln geben. Eben so könnte auf das mögliche Statt finden von jeder andern ungeraden Anzahl von Wurzeln geschlossen werden.

II. Wenn für $x = p$ und $x = q$ das Polynomium X das Zeichen nicht ändert; so gibt es zwischen p und q entweder keine reelle Wurzeln, oder nur eine gerade Anzahl von solchen. Der Beweis dafür ist dem unter I. geführten analogisch.

III. Ob aber eine Gleichung reelle Wurzeln habe, es seyen rationale oder irrationale, läßt sich aus Folgendem erkennen:

1) Ist der höchste Exponent $= n$ von x eine ungerade Zahl, so ist wenigstens eine Wurzel reell. (Vergl. §. 181. 3° und 5°), und zwar ist diese positiv, wenn das letzte Glied der Gleichung negativ ist; negativ, wenn das letzte Glied positiv ist, weil das letzte Glied immer das Produkt vom Gegentheile der Wurzeln ist, und zwei zusammengehörige unmögliche Wurzeln: $m \pm n\sqrt{-1}$ oder $-m \mp n\sqrt{-1}$ mit einander multiplizirt immer das positive Produkt $m^2 + n^2$ geben. Aus dem nämlichen Grunde hat

2) eine Gleichung, in der n gerade, und das letzte Glied negativ ist, wenigstens zwei reelle Wurzeln, von welchen die eine positiv, die andre negativ ist.

3) Ist n gerade und das letzte Glied positiv, so kann nicht bestimmt werden, ob die Gleichung reelle Wurzeln habe oder nicht.

. . . . . .

IV. Auflösung der Gleichungen durch Annäherung.

§. 186.

Es gibt für höhere Gleichungen mehrere Näherungsmethoden, d. i. mehrere Methoden, durch welche man die irrationalen

Wurzeln, wenn auch nicht vollständig, (dieß widerspräche auch dem Begriffe von irrational), doch so genau finden kann als es zu irgend einem Zwecke erforderlich ist. Einfach ist die von Newton erfundene. Sie besteht in Folgendem:

I. Man untersuche nach der Form der gegebenen Gleichung, ob sie reelle Wurzeln habe (§. 185. III.), und ob diese positiv oder negativ sind. (§. 181. 6°).

II. Man suche nach §. 185 die Grenzen der Wurzeln. Manchmal ergibt sich auch bei reellen Wurzeln kein Zeichenwechsel, sondern der Werth des Polynomiums X der Gleichung nimmt abwechselnd zu und ab. In diesem Falle substituire man jenen Werth von x, durch welchen X den kleinsten Werth erhält, sammt einem ächten Bruche, z. B. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ ꝛc., und erforsche, ob sich nicht dadurch ein Zeichenwechsel und damit ein Kennzeichen der Wurzelgrenzen ergibt.

III. Man setze, wenn p und q sich nahe liegende Grenzen einer Wurzel bezeichnen, und $p < q$ ist, $x = p + w$, wo w einen noch unbestimmten ächten Bruch bezeichnet, und substituire $p + w$ statt x in die allgemeine Gleichung:

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots\ldots Nx + P = 0.$$

$$(p+w)^n + A(p+w)^{n-1} + B(p+w)^{n-2} + C(p+w)^{n-3} + \ldots N(p+w) + P = 0$$

Entwickelt man die Glieder einzeln nach dem binomischen Lehrsatze, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} (p+w)^n = p^n + np^{n-1} \\ A(p+w)^{n-1} = Ap^{n-1} + (n-1)Ap^{n-2} \\ B(p+w)^{n-2} = Bp^{n-2} + (n-2)Bp^{n-3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ N(p+w) = Np + N \\ P = P \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} w + \frac{n(n-1)}{1.\,2}p^{n-2} \\ + \frac{(n-1)(n-2)}{1.\,2}Ap^{n-3} \\ + \frac{(n-2)(n-3)}{1.\,2}Bp^{n-4} \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} w^2 + \ldots$$

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots P = p^n + Ap^{n-1} + Bp^{n-2} + \ldots Np + P$$
$$+ (np^{n-1} + (n-1)Ap^{n-2} + (n-2)Bp^{n-3} + N)w + \ldots = 0.$$

Da

Da w einen ächten Bruch bezeichnet, dessen Potenzen immer kleiner werden; so sind jene Glieder, welche das Quadrat oder eine höhere Potenz von v enthalten, im Verhältnisse zu den übrigen Gliedern unbeträchtlich, und können daher hier, wo es nur um Näherung zu thun ist, hinweggelassen werden. Demnach erhält man die einfache Gleichung:

$$p^n + Ap^{n-1} + Bp^{n-2} + \ldots . Np + P + [np^{n-1} + (n-1)Ap^{n-2} + (n-2)Bp^{n-3} + \ldots N]\,v = 0,$$

$$\text{woraus } v = -\frac{p^n + Ap^{n-1} + Bp^{n-2} + \ldots\ldots Np + P}{np^{n-1} + (n-1)Ap^{n-2} + (n-2)Bp^{n-3} + \ldots . N},$$

$$\text{mithin } x = p - \frac{p^n + Ap^{n-1} + Bp^{n-2} + \ldots\ldots Np + P}{np^{n-1} + (n-1)Ap^{n-2} + (n-2)Bp^{n-3} + \ldots N}.$$

Setzt man den nach dieser Formel gefundenen Näherungswerth $= p$, und substituirt ihn neuerdings in dieselbe, so erhält man den Näherungswerth genauer. Durch solche wiederholte Substitutionen der zuletzt gefundenen Näherungswerthe kann man sich der wahren Wurzel beliebig nähern.

Zusatz. Setzt man $n = 2$, so erhält man die Näherungsformel für quadratische Gleichungen:

$$x = p - \frac{p^2 + Ap + B}{2p + A}.$$

Setzt man $n = 3$, so erhält man für kubische Gleichungen:

$$x = p - \frac{p^3 + Ap^2 + Bp + C}{3p^2 + 2Ap + B}.$$

Setzt man $n = 4$, so erhält man für biquadratische Gleichungen:

$$x = p - \frac{p^4 + Ap^3 + Bp^2 + Cp + D}{4p^3 + 3Ap^2 + 2Bp + C}.$$

§. 187.

Beispiele.

I. $x^3 - 3x^2 - 17x + 43 = 0.$

Diese Gleichung enthält zwei Wechsel der Zeichen und eine Folge, mithin, wenn alle Wurzeln reell sind, zwei positive und eine negative Wurzel; wenigstens eine Wurzel muß reell seyn, weil die Gleichung vom dritten Grade ist, und zwar negativ, weil das letzte Glied positiv ist. Substituirt man der Ordnung nach

$x = +1, +2, +3, +4, +5 \ldots$, so erhält man

$X = +54, +5, -8, -9 + 8 \ldots$;

für $x = -1, -2, -3, -4, -5$

wird $X = +54, +52, +40, +9, -72$.

Zwischen die Werthe von $+2$ und $+3$, zwischen $+4$ und $+5$, und zwischen -4 und -5 fällt für X ein Zeichenwechsel, mithin sind jene Zahlen Wurzelschranken.

Setzt man $x = 2 + v$, und substituirt in die §. 186 Zus. für kubische Gleichungen aufgestellte Näherungsformeln; so ist

$$p = 2, \quad A = -3, \quad B = -17, \quad C = 43$$

$$v = -\frac{8 - 3.4 - 17.2 + 43}{3.4 + 2. - 3.2 - 17} = -\frac{5}{-17} = \frac{5}{17} = 0{,}294\ldots\ldots,$$

mithin $x = 2 + 0,294 = 2{,}294$.

Setzt man 2,294 .... nahe $= 2, 3$ statt p in obige Formel, so erhält man

$$v = -\frac{12{,}167 - 3.5{,}29 - 17.2{,}3 + 43}{3.5{,}29 - 3.2{,}3.2 - 17} = -\frac{0{,}197}{-14{,}93} = 0{,}0132$$

$$x = 2, 3 + 0{,}0132 = 2{,}3132$$

Wollte man diesen Werth von x neuerdings statt p substituiren, so erhielte man einen noch genauern, in den erstern Dezimalen vom obigen nicht abweichenden Näherungswerth $= 2{,}313313\ldots$

Die beiden andern Wurzeln erhielte man durch ein ähnliches Verfahren. Man erhält sie auch, wenn man die gegebene Gleichung durch $x - 2{,}3133 = 0$ dividirt; der Quotient wird eine quadratische Gleichung seyn, deren Wurzeln auch zur gegebenen Gleichung gehören. Man setze zur Abkürzung der Rechnung vorher $2{,}3133 = p$.

$$x^3 - 3x^2 - 17x - 43 \;\big|\; x^2 + (p-3)x + (p^2 - 3p - 17) = 0$$

$(x - p)$

$x^3 - px^2$

$- \quad +$

$(p-3)x^2 - 17x$

$(x - p)$

$(p-3)x^2 - (p^2 - 3p)x$

$- \quad +$

$(p^2 - 3p - 17)x + 43$

$x - p$

$(p^2 - 3p - 17)x - (p^3 - 3p^2 - 17p)$

$- \quad +$

ϕ

* auch $p^3 - 3p^2 - 17p$ hebt sich gegen 43, weil $p^3 - 3p^2 - 17p + 43$, konform mit der gegebenen Gleichung, $= 0$ ist.

Substituirt man in die Gleichung $x^2 + (p-3)x + p^2 - 3p - 17 = 0$ wieder $p = 2{,}3133$; so erhält man

$$x^2 - 0{,}6867x - 18{,}587943 = 0$$

$$x^2 - 0{,}6867x + (0{,}34335)^2 = 18{,}587943 + (0{,}34335)^2$$

$$x - 0{,}34335 = \pm\sqrt{18{,}705953}$$

$$x = 0{,}34335 \pm 4{,}32503$$

$x = 4{,}66838$ oder

$x = -3{,}98168$ nahe $= -4$

Es ist auch $-4{,}66838 - 2{,}3133 + 3{,}98168 = -3$ gemäß §. 164. Zus. III. 1°.

II. $x^4 - 8x^3 - 12x^2 + 200x - 360 = 0$.

Da das letzte Glied negativ, und der höchste Exponent der unbekannten Größe eine gerade Zahl ist; so hat die Gleichung wenigstens zwei reelle Wurzeln, von welchen die eine positiv, die andere negativ ist.

Für $x = +2, +3, +4, +5$

ist $X = -56, -3, -8, -35$.

Da sich hier kein Zeichenwechsel ergibt, aber von $x = 2$ bis $x = 3 \ldots X$ abnehmend, von $x = 3$ bis $x = 4 \ldots X$ zunehmend ist, so ist es wahrscheinlich, daß zwischen 3 und 4 zwei positive Wurzeln fallen. Setzt man $x = 3\frac{1}{4} = 3{,}25$, so ist $X = +0{,}19$; für $x = 3\frac{1}{2} = 3{,}5$ ist $X = -1{,}94$. Folglich fällt eine positive Wurzel zwischen $+3$ und $+3{,}25$, eine zweite zwischen $+3{,}25$ und $3{,}5$.

Setzt man $x = 3 + v$, so ist nach der Näherungsformel

$$A = -8,\ B = -12,\ C = 200$$

$$D = -360,\ p = 3,\ n = 4$$

$$v = -\frac{81 - 8.27 - 12.9 + 200.3 - 360}{4.27 - 3.8.9 - 2.12.3 + 200} = -\frac{-3}{20} = 0{,}15.$$

Also die erste Wurzel annähernd $= 3 + 0{,}15 = 3{,}15$.

Setzt man $x = 3{,}25 + v$, so ist $v = -\frac{0{,}1916}{-3{,}2} = 0{,}0597$;

also die zweite Wurzel $x = 3{,}25 + 0{,}0597 = 3{,}3097$.

$(x^4 - 8x^3 - 12x^2 + 200x - 360) : (x - 3{,}15).(x - 3{,}3097) =$

$x^2 - 1{,}54x - 32{,}5 = 0$, wofür $x = 6{,}52$ und $= -4{,}98$.

§. 188.

Eine zweite, einfache Näherungsmethode, regula falsi genannt, besteht in Folgendem.

I. Man suche für die Gleichung $X = 0$ die Wurzelschranken. Diese seyen p und q, so daß $p < q$; für $x = p$ erhalte man $X = P$, für $x = q$ erhalte man $X = -Q$.

II. Man setze nun die Proportion an:

Die Abweichungen der statt x angenommenen Werthe vom eigentlichen Werthe des x verhalten sich, wie die Resultate der Substitutionen. Also

$$(x-p) : (x-q) = P : -Q, \text{ oder}$$

$$-(x-p)Q = (x-q)P \text{ und}$$

$$x = \frac{Pq+Qp}{P+Q}.$$

Der dadurch erhaltene Werth kommt dem wahren Werthe von x schon näher; durch wiederholte Substitutionen wird ein immer genaueres Resultat erhalten.

Beispiel. $X = x^3 - 8x + 8 = 0$.

Auflösung. Für $x = 1$ erhält man $X = 1$, für $x = 1{,}5$ erhält man $X = -0{,}625$; daher sind 1 und 1,5 Wurzelschranken, und $p = 1$, $q = 1{,}5$, $P = 1$, $Q = 0{,}625$; also

$$x = \frac{1.1{,}5 + 0{,}625.1}{1+0{,}625} = 1{,}3077.$$

Für $x = 1{,}3$ erhält man $X = -0{,}203$, also 1,3 etwas zu groß, $= q$ und $Q = 0{,}203$. Durch eine neue Substitution

$$x = \frac{1.1{,}3 + 0{,}203.1}{1+0{,}203} = 1{,}238.$$

Da nun wieder für $x = 1{,}238$ der Werth von $X = -0{,}0066$, eine negative Zahl wird; so fällt eine Wurzel zwischen 1 und 1,238. Man setze daher $p = 1$; $q = 1{,}238$; $P = 1$, $Q = 0{,}0066$. Daraus wird $x = \frac{1.1{,}238 + 0{,}0066.1}{1+0{,}0066} = 1{,}23606$.

Dieser Werth ist nur mehr um 0,000008 zu klein.

Die beiden andern Wurzeln, welche man entweder durch Substitutionen oder durch Division der gegebenen Gleichung durch $x - 1{,}23606 = 0$ und Auflösung der dadurch gefundenen quadratischen Gleichung finden kann, sind: $x = 2$ und $x = -3{,}236068$.

V. Höhere Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

§. 189.

Sind eben so viele, von einander verschiedene, höhere Gleichungen mit mehreren Unbekannten gegeben, als der letzteren sind, (dieß ist nothwendig, wenn die Aufgabe bestimmt seyn soll); so können sie, wie die einfachen Gleichungen, durch Komparation, Substitution oder Elimination immer so mit einander verbunden werden, daß zuletzt nur eine Gleichung mit einer Unbekannten vorhanden ist. Nur wird diese letzte Gleichung immer von höherm Grade seyn, als die gegebenen sind. Hier folgt ein Beispiel aufgelöset, statt vieler Regeln.

$$x^2 + xy + y^2 = 8 - y \ldots\ldots \text{A}$$

$$\frac{x^2 + x - 4}{y} = x - y + 1 \ldots\ldots \text{B}.$$

Aus A ist $x^2 = 8 - y - xy - y^2 \ldots\ldots$ (a

Aus B $x^2 = xy + y - y^2 - x + 4 \ldots$ (b

Komparirt: $8 - y - xy - y^2 = xy + y - y^2 - x + 4$

$$4 - 2y = 2xy - x$$

$$x = \frac{4 - 2y}{2y - 1} \ldots\ldots (\alpha$$

$$x^2 = \left(\frac{4 - 2y}{2y - 1}\right)^2 = \frac{16 - 16y + 4y^2}{4y^2 - 4y + 1}.$$

Komparirt man diesen Werth von x^2 mit dem in (a, so erhält man

$$8 - y - xy - y^2 = \frac{16 - 16y + 4y^2}{4y^2 - 4y + 1};$$

daraus ergibt sich $x = \dfrac{31y^2 - 4y^4 - 17y - 8}{4y^3 - 4y^2 + y}$.

Diesen Werth von x mit dem in α komparirt, gibt

$$\frac{4 - 2y}{2y - 1} = \frac{31y^2 - 4y^4 - 17y - 8}{4y^3 - 4y^2 + y}.$$

Multiplizirt man mit den Nennern der beiden Brüche, so erhält man

$$-8y^4+24y^3-18y^2+4y=-8y^5+4y^4+62y^3-65y^2+y+8.$$

Bringt man diese Gleichung auf die Form einer geordneten, so ist

$$y^5-\tfrac{3}{2}y^4-\tfrac{19}{4}y^3+\tfrac{47}{8}y^2+\tfrac{3}{8}y-1=0$$

$$\underline{1\ ,\ 2\ ,\ 4\ ,\ 8\ ,\ 16\ ,\ 32}$$

$$z^5-3z^4-19z^3+47z^2+6z-32=0.\ (\text{Vgl. §. 167})\ldots.(\beta.$$

Für diese Gleichung ist eine Wurzel $z=+2$, mithin $y=\frac{z}{2}=1$ und $y=\frac{4-2y}{2y-1}=2$. Außerdem ist für die Gleichung $\beta\ldots z=1$. Dividirt man die Gleichung β mit $(z-2)(z-1)$, so erhält man die kubische Gleichung $z^3-21z-16=0$, deren 3 Wurzeln sind: 4,814, —0,532 und —4,282. Aus diesen lassen sich nun leicht die entsprechenden Werthe von y und x bestimmen.

§. 190.

Sind die Wurzeln der Gleichungen mit mehreren Unbekannten Irrationalzahlen; so können sie in ähnlicher Art, wie die irrationalen Wurzeln der Gleichungen mit einer Unbekannten, durch Approximation gefunden werden, und zwar nach Newton's Methode in folgender Art. Man suche durch Probiren für jede Unbekannte Werthe, welche jede der gegebenen Gleichungen nahezu auf Null bringen. Gesetzt, es seyen zwei Gleichungen A und B mit zwei Unbekannten x und y gegeben, und p für x, so wie q für y substituirt, bringen die Gleichungen nahe auf Null; so setze man in A und B $x=p+v$ und $y=q+w$, wo v und w nur kleine Brüche bezeichnen können. Dadurch erhält man zwei neue Gleichungen C und D, welche einfache werden, wenn man alle Glieder, in denen das Quadrat oder eine höhere Würde von v oder w, oder vw vorkommen, als unbeträchtlich hinwegläßt. Aus C und D können dann v und w leicht entwickelt, und damit x und y näher bestimmt werden. Die Annäherung wird noch genauer, wenn man diese Werthe statt p und q substituirt, und das angezeigte Verfahren wiederholt.

Beispiel.

$$x^3 + y^2x - 10 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad A$$
$$y^3 + 3yx^2 - 15 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad B.$$

Für $x = 2$ und $y = 1$ wird $A = 0$, $B = -2$. Daher fallen die wahren Werthe von x und y zwischen 2 und 1. Man vermindere daher den Werth von x, und vermehre den von y um Weniges:

$x = 1{,}9$ und $y = 1$ gibt $A = -1{,}241$ und $B = -3{,}17$
$x = 1{,}9$ und $y = 1{,}3$ gibt $A = 0{,}07$ und $B = 0{,}076$.

$x = 1{,}9$ und $y = 1{,}3$ bringen nun die Gleichungen A und B nahezu auf 0; man substituire daher $x = 1{,}9 + v$ und $y = 1{,}3 + w$, und vernachlässige die Potenzen und Produkte von v und w, so wird

$$(1{,}9 + v)^3 + (1{,}9 + v)(1{,}3 + w)^2 - 10 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (a$$
$$(6{,}859 + 10{,}83v) + (3{,}211 + 4{,}94w + 1{,}69v) - 10 = 0$$
$$12{,}52v + 4{,}94w + 0{,}07 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha$$

$$(1{,}3 + w)^3 + 3(1{,}9 + v)^2(1{,}3 + w) - 15 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (b$$
$$(2{,}197 + 5{,}07w) + (12{,}879 + 14{,}82v + 3{,}61w) - 15 = 0$$
$$14{,}82v + 8{,}68w + 0{,}076 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\beta$$

Aus α . . . . $v = \dfrac{-0{,}07 - 4{,}94w}{12{,}52}$.

Aus β . . . . $v = \dfrac{-0{,}076 - 8{,}68w}{14{,}82}$.

Komparirt: $\dfrac{-0{,}07 - 4{,}94w}{12{,}52} = \dfrac{-0{,}076 - 8{,}68w}{14{,}82}$; daraus

$$w = 0{,}0024226 \text{ und } v = -0{,}00684.$$

Daher $x = 1{,}88316$ und
$y = 1{,}3024226$.

Anmerkung. Bei mehreren Gleichungen mit mehreren Unbekannten ist das Verfahren das nämliche, nur weit langwieriger.

Zweites Hauptstück.

Unbestimmte Analytik, oder von der Auflösung unbestimmter Probleme.

§. 191.

Vorbegriffe.

I. Unbestimmt heißt ein Problem, wenn für die unbekannten Größen in demselben mehrere Werthe möglich sind, welches dann eintrifft, wenn die Aufgabe mehr unbekannte Größen enthält, als sich aus den gegebenen Bedingungen des Problems Gleichungen bilden lassen.

II. Die Anzahl der möglichen Auflösungen ist zwar bei verschiedenen unbestimmten Problemen verschieden, und manchmal unendlich groß; doch werden diese möglichen Werthe gewöhnlich dahin beschränkt, daß man die unbekannten Größen in lauter ganzen und zwar positiven, oder wenigstens rationalen Zahlen zu bestimmen verlangt.

III. Man unterscheidet auch hier einfache und zusammengesetzte Probleme. Von den letztern wollen wir nur ein und das andere Beispiel auswählen, weil ihr Umfang zu groß, ihre Anwendung aber eben nicht sehr häufig ist.

IV. Der erste Artikel handelt von jenen Aufgaben, worin aus einer Gleichung mehrere unbekannte Größen gesucht werden sollen, und welche in der Formel:

$$ax \pm by \pm cz = S$$

enthalten sind, wo a, b, c ganze positive Zahlen bedeuten, und die Werthe von x, y, z in eben solchen Zahlen gefunden werden sollen.

Der zweite Artikel handelt von der sogenannten Regula Coeci oder Virginum, wo aus zwei Gleichungen drei oder mehrere unbekannte Größen gefunden werden sollen, und welche in der Form:

$$x + y + z = S,$$
$$ax + by + cz = P$$

enthalten sind.

Als Anhang folgen einige zusammengesetzte unbestimmte Probleme.

Erster Artikel.

Unbestimmte Probleme, mit mehreren unbekannten Größen und einer einzigen Gleichung.

§. 192.

I. Aufgabe. Zwei ganze positive Zahlen zu suchen, deren Summe 12 ist.

Auflösung. Diese Zahlen seyen x und y, so erhält man

$$x + y = 12$$
$$x = 12 - y.$$

Man kann nun für y alle Zahlen von 1 bis 11 nehmen, weil die Bedingung beigesetzt wurde, daß beide Größen ganze und positive Zahlen seyn müssen. — Diese Aufgabe läßt also folgende 6 Auflösungen zu:

$$y = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.$$
$$x = 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.$$

Die fünf letzten Auflösungen sind nämlich schon in den 6 ersten enthalten.

Hätte man drei Zahlen zu finden, deren Summe 12 ist, so dürfte man nur die Werthe von x wieder in zwei Theile zertheilen, wodurch man eine viel größere Menge von Auflösungen erhielte.

II. Aufgabe. Zwei Zahlen zu finden, deren Differenz 10 ist.

Auflösung. $x - y = 10$
$$x = y + 10.$$

Man sieht gleich auf den ersten Anblick, daß dieses Problem unendlich viele Auflösungen zulasse. Denn setzt man für y was immer für eine Zahl, so wird doch x immer um 10 größer seyn.

III. Aufabe. Zwei ganze, positive Zahlen zu finden, deren Produkt 48 ist.

Auflösung. $x \times y = 48$
$$x = \frac{48}{y}.$$

Man wählt nun für y solche Zahlen, welche Faktoren von 48 sind; da gibt es denn folgende Auflösungen:

$$y = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6.$$
$$x = 48,\ 24,\ 16,\ 12,\ 8.$$

IV. Aufgabe. Zwei ganze positive Zahlen zu finden, welche zum Quotus 4 geben.

Auflösung. $\frac{x}{y} = 4$

$$x = 4y.$$

Auch dieses Problem läßt unendlich viele Auflösungen zu; denn man setze für y was immer für ganze Zahlen, so wird die Forderung der Aufgabe befriediget seyn.

$$y = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10.$$
$$x = 4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20,\ 24,\ 28,\ 32,\ 36,\ 40.$$

§. 193.

Nun trifft die Reihe jene Probleme, in welchen die unbekannten Größen auch Koeffizienten vor sich haben, und welche in der allgemeinen Form: $ax \pm by = c$ enthalten sind. — Aus dieser Form ergibt sich, daß nur jene Aufgaben nach ganzen Zahlen aufgelöset werden können, in welchen a und b keinen Faktor gemein haben, der nicht auch in c enthalten ist. Denn gesetzt, m sey ein solcher, nur dem a und b gemeinschaftlich zukommender, Faktor, so daß $\frac{a}{m} = \alpha$, $\frac{b}{m} = \beta =$ einer ganzen Zahl, $\frac{c}{m}$ ein Bruch ist; so kann nur dann $\alpha x \pm \beta y = \frac{c}{m}$ seyn, wenn x oder y, oder beide Brüche sind. — Für $ax - by = c$ sind gewöhnlich unendlich viele, für $ax + by = c$ nur wenige Auflösungen möglich.

Aus der Gleichung $ax \pm by = c$ wird gefunden: $x = \frac{c \mp by}{a}$. Ist a in c ohne Rest, z. B. n mal enthalten, also $x = n \mp \frac{by}{a}$; so muß y immer als ein Vielfaches von a, wovon der zweite Faktor noch unbestimmt ist, und mit A, B etc. be-

zeichnet werden kann, dargestellt werden, da der Voraussetzung nach a und b Primzahlen unter sich seyn müssen. Z. B.

$$6x - 7y = 120$$

$$x = \frac{120 + 7y}{6} = 20 + \frac{7y}{6}.$$

Hier ist $y = 6A$, $x = 20 + 7A$; statt A kann jeder Werth, von 1 angefangen, gesetzt werden.

Für $A = 1$ ist $y = 6$, $x = 27$
„ $A = 2$ „ $y = 12$, $x = 34$ etc.

Sind a, b, c Ganze und Primzahlen unter sich, so können x und y nach ganzen, positiven Zahlen durch fortgesetzte Division, oder Kettenbrüche gefunden werden. Letztere Auflösungsart siehe unten §. 194; erstere wird am leichtesten aus Beispielen gelernt.

I. Aufgabe. Man theile die Zahl 100 in zwei Theile, von denen der erste durch 3, der andere durch 5 theilbar ist.

Auflösung. Es seyen diese beiden Zahlen x und y. Da nun x durch 3, und y durch 5 theilbar seyn soll, so muß x ein Vielfaches von 3, y ein Vielfaches von 5 seyn; man setze daher

$$x = 3A$$
$$y = 5B,$$

wo man für A und B alle beliebigen ganzen Zahlen substituiren kann.

$$3A + 5B = 100$$
$$3A = 100 - 5B$$
$$A = \frac{100 - 5B}{3}.$$

Man sieht hieraus, daß B kleiner als 20 seyn müsse, weil sonst $A = 0$ würde. — Man ziehe nun aus dieser Fraktion $\frac{100-5B}{3}$ so viele Ganze als möglich;

$$A = 33 - B + \frac{1-2B}{3} = 33 - B - \left(\frac{2B-1}{3}\right).$$

A soll eine ganze Zahl seyn, folglich muß der Ausdruck $\frac{2B-1}{3}$ auch ein Ganzes seyn; man setze ihn daher einer neuen unbestimmten Größe C gleich, so ist

$$\frac{2B-1}{3} = C$$
$$2B-1 = 3C$$
$$2B = 3C+1$$
$$B = \frac{3C+1}{2} = C + \frac{C+1}{2}.$$

Dieſe Fraktion $\frac{C+1}{2}$ ſey $= D$

$$C+1 = 2D$$
$$C = 2D-1.$$

Nun ſubſtituire man den Werth von C in den von B, ſo iſt $B = \frac{3(2D-1)+1}{2} = \frac{6D-3+1}{2} = 3D-1$; dieſes in den Ausdruck von A, ſo iſt

$$A = \frac{100-5(3D-1)}{3} = 35-5D, \text{ und}$$
$$x = 3(35-5D) = 105-15D$$
$$y = 5(3D-1) = 15D-5.$$

Für D können nun die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 geſetzt werden:

D = 1.	D = 2.	D = 3.	D = 4.	D = 5.	D = 6.
x = 90.	x = 75.	x = 60.	x = 45.	x = 30.	x = 15.
y = 10.	y = 25.	y = 40.	y = 55.	y = 70.	y = 85.

Dieſes ſind nun die ſechs möglichen Auflöſungen, wenn x und y poſitive ganze Zahlen ſeyn ſollen. Wollte man $D = 7$ ſetzen, ſo erſchiene: $B = 20$ und $A = 0$.

Wollte man aber $D = 0$ oder $= -1, -2, -3$ ſetzen, ſo würde $y = -5$, alſo negativ werden.

Dieſe Operation iſt nun ein Formular für alle ähnlichen unbeſtimmten Probleme.

II. Aufgabe. Es ſollen 100 fl. in alten Laubthalern (zu 2 fl. 45 kr.) und Bayerthalern bezahlt werden. Wie kann dieſes geſchehen, ohne daß man nöthig habe, wieder herauszugeben?

Auflöſung. Man hat vonnöthen x Laubthaler und y Bayerthaler. Nun beſtimme man beide Größen in dem Guldenwerthe,

$$\left.\begin{array}{l} x \text{ Laubthaler} = \frac{11x}{4} \text{ fl.} \\ y \text{ Bayerthaler} = \frac{12y}{5} \text{ fl.} \end{array}\right\} = 100 \text{ fl.}$$

1) $\frac{11x}{4} + \frac{12y}{5} = 100$

$$\frac{55x + 48y}{20} = 100$$

$$55x + 48y = 2000$$

$$y = \frac{2000 - 55x}{48} = 41 - x + \frac{32 - 7x}{48}$$

$$= 41 - x - \left(\frac{7x - 32}{48}\right).$$

2) $\frac{7x - 32}{48} = A$

$$7x - 32 = 48A$$

$$x = \frac{48A + 32}{7} = 6A + 4 + \frac{6A + 4}{7}.$$

3) $6A + 4 = 7B$

$$A = \frac{7B - 4}{6} = B + \frac{B - 4}{6}.$$

4) $\frac{B - 4}{6} = C$

$$B = 6C + 4.$$

Rückwärts substituirt ist $A = \frac{7(6C + 4) - 4}{6} = 7C + 4$

$$x = \frac{48(7C + 4) + 32}{7} = 48C + 32$$

$$y = \frac{2000 - 55(48C + 32)}{48} = 5 - 55C.$$

Man setze nun $C = 0$, so wird $x = 32$. $y = 5$.

Man hat also 32 Laubthaler und 5 Bayerthaler nothwendig. 32 Laubthaler = 88 fl., 5 Bayerthaler = 12 fl.; aber $88 + 12 = 100$.

Und zwar ist dieses die einzige mögliche Auflösung, wenn x und y positiv seyn sollen. Wollte man für C eine größere oder kleinere Zahl setzen, als 0, so würde entweder x oder y negativ werden, d. h. der Bezahlende müßte sich den Ueberschuß in der einen oder andern Münze herausgeben lassen.

III. Aufgabe. Man ſuche zwei Zahlen, deren Summe 85 iſt, und wovon die erſte durch 3 dividirt 2, die andere durch 4 dividirt 3 übrig läßt.

Auflöſung. Die verlangten Zahlen ſeyen x und y.

$$x + y = 85.$$

Wäre x um 2 kleiner, ſo gäbe es durch 3 dividirt eine ganze Zahl $= A$ zum Quotienten, d. i. $\frac{x-2}{3} = A$; eben ſo $\frac{x-3}{4} = B$; oder

$$x = 3A + 2$$
$$y = 4B + 3.$$

Subſtituirt: $3A + 2 + 4B + 3 = 85$

$$3A + 4B = 80.$$

$$A = \frac{80-4B}{3} = 26 - B - \left(\frac{B-2}{3}\right).$$

$$B - 2 = 3C$$
$$B = 3C + 2.$$

Rückwärts ſubſtituirt:

$$A = \frac{80-4(3C+2)}{3} = 24 - 4C$$
$$x = 3(24-4C) + 2 = 74 - 12C$$
$$y = 4(3C+2) + 3 = 12C + 11.$$

Setzt man für C .. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

$C = 0$	$C = 1$	$C = 2$	$C = 3$	$C = 4$	$C = 5$	$C = 6$
$x = 74$	$x = 62$	$x = 50$	$x = 38$	$x = 26$	$x = 14$	$x = 2$
$y = 11$	$y = 23$	$y = 35$	$y = 47$	$y = 59$	$y = 71$	$y = 83.$

Es ſind alſo in ganzen poſitiven Zahlen ſieben Auflöſungen möglich.

IV. Aufgabe. Man ſuche eine Zahl, welche durch 11 theilbar iſt, durch 17 dividirt aber 5 zum Reſte läßt.

Auflöſung. Die Zahl ſey $= x$.

$$\text{Alſo } x = 11A$$
$$x = 17B + 5.$$

$$11A = 17B + 5.$$

$$A = B + \frac{6B+5}{11} = B + C.$$
$$6B + 5 = 11C.$$

$$B = C + \frac{5C-5}{6} = C + D$$

$$5C - 5 = 6D.$$

$$C = \frac{6D+5}{5} = D + 1 + E.$$

$$D = 5E.$$

$$C = \frac{6D+5}{5} = 6E + 1.$$

$$B = \frac{11C-5}{6} = 11E + 1.$$

$$A = \frac{17B+5}{11} = 17E + 2.$$

$$x = 11(17E+2) = 187E + 22.$$

Substituirt man hier für E ... 0, 1, 2, 3, 4; so erhält man wieder für x: 22, 209, 396, 583 u. s. w.

V. Aufgabe. Es wurde eine Anzahl Gänse und Ferkel gekauft; eine Gans wurde um 17, ein Ferkel um 29 Groschen bezahlt. Es kosteten aber die Ferkel um 7 Groschen mehr, als die Gänse. Wie viele Stücke konnten es von jeder Gattung gewesen seyn?

Auflösung. Es waren x Gänse und y Ferkel, jene kosteten 17x, diese 29y Groschen; mithin

$$17x = 29y - 7.$$

$$x = \frac{29y-7}{17} = y + \frac{12y-7}{17} = y + A.$$

$$A = \frac{12y-7}{17}.$$

$$y = \frac{17A+7}{12} = A + \frac{5A+7}{12} = A + B.$$

$$A = \frac{12B-7}{5} = 2B + \frac{2B-7}{5} = 2B + C.$$

$$B = \frac{5C+7}{2} = 2C + \frac{C+7}{2} = 2C + D.$$

$$C = 2D - 7.$$

Nun bestimme man x und y in Aequivalenten von D.

$$B = 2C + D = 5D - 14.$$

$$A = 2B + C = 12D - 35.$$

$$y = A + B = 17D - 49.$$

$$x = y + A = 29D - 84.$$

Jetzt substituire man in den Werthen von x und y für D eine beliebige Zahl, die jedoch nicht kleiner als 3 seyn darf, weil sonst x und y negativ würde. — Es konnten also gewesen seyn

Ferkeln: 2, 19, 36, 53, 70, 87 ... (Differenz 17).
Gänse: 3, 32, 61, 90, 119, 148 ... (Differenz 29).

§. 194.

Kürzer können solche Aufgaben durch Kettenbrüche in folgender Art gelöset werden.

Löset man nämlich von der allgemeinen Form der unbestimmten Gleichungen

$$ax - by = c$$

die Koeffizienten a und b in Kettenbrüche auf, und nimmt man an, daß $\frac{m}{n}$ der letzte Näherungswerth für $\frac{a}{b}$ ist, daß also $\frac{m}{n}$ und $\frac{a}{b}$ zwei auf einander folgende, sich nähernde Brüche sind; so ist ein Werth von $x = \pm nc$, von $y = \pm mc$. Denn substituirt man diese Werthe in obige Gleichung, so erhält man:

$$\pm anc - (\pm bmc) = c, \text{ oder}$$
$$anc - bmc = \pm c, \text{ durch c dividirt}$$
$$an - bm = \pm 1;$$

nach §. 63. II. ist aber immer $an - bm = \pm 1$, folglich $x = \pm nc$ und $y = \pm mc$ immer eine ganze Zahl, welche der Aufgabe Genüge leistet. Allgemeiner kann gesetzt werden:

$$x = \pm nc + bu$$
$$y = \pm mc + au,$$

wo u eine unbestimmte Größe ausdrückt, für welche jede Zahl gesetzt werden kann; denn wenn man jene Werthe von x und y in obige Gleichung substituirt, so erhält man

$$a(\pm nc + bu) - b(\pm mc + au) = c$$
$$\pm anc + abu \mp bmc - abu = c$$
$$an - bm = \pm 1.$$

Rücksichtlich der doppelten Zeichen bei cn und cm ist zu bemerken, daß das Zeichen + zu nehmen ist, wenn die Anzahl der Näherungswerthe (die etwa vorhandenen Ganzen und den

Bruch

Bruch $\frac{a}{b}$ nicht mitgerechnet) gerade, das Zeichen —, wenn dieselbe ungerade ist.

Beispiele.

I. Welche Zahlen geben durch 3 dividirt 1, und durch 5 dividirt 2 zum Reste?

Auflösung. $3x + 1 = 5y + 2$ oder

$$3x - 5y = 1.$$

Hier ist $a = 3$, $b = 5$, $c = 1$. Löset man $\frac{3}{5}$ in einen Kettenbruch auf:

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$$

Dafür sind die Näherungswerthe: $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$; also $m = 1$, $n = 2$, und $x = 2 + 5u$, $y = 1 + 3u$. Für $u = 0$ ist $x = 2$, $y = 1$ ꝛc.

II. Aufgabe V. des §. 193.

$$29x - 17y = 7.$$

Hier ist $a = 29$, $b = 17$, $c = 7$; die Näherungswerthe von $\frac{29}{17}$ sind (den ersten Quotienten, welcher 1 als Ganzes gibt, nicht mitgerechnet,): $\frac{2}{1}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{12}{7}$, $\frac{29}{17}$; also $m = 12$, $n = 7$. Da aber der letzte Näherungswerth $\frac{12}{7}$ der dritte ist, so ist nc und mc negativ zu nehmen. Mithin

$$x = 17u - 7.7 = 17u - 49$$
$$y = 29u - 12.7 = 29u - 84.$$

* Diese Werthe stimmen mit den oben gefundenen überein, wenn, wie es in der Gleichung geschehen ist, x mit y verwechselt wird. Bringt man die nämliche Aufgabe auf die Form (ohne Verwechselung von x und y): $17x - 29x = -7$; so ist für $\frac{a}{b} = \frac{17}{29}$ der letzte Näherungswerth $\frac{m}{n} = \frac{7}{12}$ zwar der vierte, und daher m und n positiv; allein nach der Gleichung ist $c = -7$, und so erhält man wieder

$$x = 29u - 84$$
$$y = 17u - 49.$$

§. 195.

Auch Gleichungen von der Form:

$$ax + by = c \quad \ldots\ldots \text{A}$$

können auf eine kürzere Art, durch Kettenbrüche, und zwar nach den nämlichen Formeln, welche oben aufgestellt sind, gelöset werden, wenn man in der Gleichung A statt y nur $-y'$ setzt. Dann erhält man die Gleichung

$$ax - by' = c \quad \ldots\ldots \text{B.}$$

Dafür $x = \pm nc + bu$

$y' = \pm mc + au$, also

$y = \mp mc - au$.

Bei dem letzten $\mp mc$ ist aber $+$ bei einer ungeraden, — bei einer geraden Anzahl von Näherungswerthen zu nehmen. Sind die beiden Glieder des Werthes von y negativ, so muß für u ein negativer Werth angenommen werden, und zwar in der Art, daß $nc > bu$ oder $\frac{nc}{b} > u$ und $au > mc$ oder $u > \frac{mc}{a}$ ist.

Beispiele.

I. Die Aufgabe II. des §. 193. heißt reduzirt:

$$55x + 48y = 2000.$$

Löset man $\frac{55}{48} = \frac{a}{b}$ in einen Kettenbruch auf, so sind dessen Näherungswerthe: $\frac{7}{6}, \frac{8}{7}, \frac{55}{48}$; der zweite von diesen $\frac{m}{n} = \frac{8}{7}$ ist der letzte (vor dem eigentlichen Bruche); also

$x = + 7.2000 + 48u = 14000 + 48u$

$y' = + 8.2000 + 55u$; und $y = - 16000 - 55u$.

Hier kann statt u nur ein negativer Werth, welcher $< \frac{1400}{43}$ und $> \frac{16000}{55}$ ist, gesetzt werden. Also ist u nur $= 291$, und dafür $x = 32$, $y = 5$.

II. $18x + 13y = 240$.

Für $\frac{a}{b} = \frac{18}{13}$ sind die Näherungswerthe: $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{7}{5}, \frac{18}{3}$; der dritte Näherungswerth $\frac{7}{5} = \frac{m}{n}$. Daher

$$x = -5.240 + 13u = -1200 + 13u$$
$$y' = -7.240 + 18u \text{ und } y = 1680 - 18u$$

$u > \frac{1200}{13}$ und $< \frac{1680}{18}$, folglich nur $= 93$. Dafür $x = 9$, $y = 6$.

§. 196.

Am wenigsten Schwierigkeit haben jene Gleichungen, worin ax dem bx unbedingt gleich, und $c = 0$ ist. Z. B. Man suche eine Zahl, welche sowohl durch 4, als durch 7 ohne Rest theilbar ist.

Auflösung. Es sey diese Zahl $= x$;

folglich $x = 4A$
$x = 7B$

$4A = 7B$
$4A - 7B = 0$.

Für $\frac{a}{b} = \frac{4}{7}$ ist $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ (zweiter Näherungswerth), also

$A = 7u + 0 = 7u$, $B = 4u + 0 = 4u$.

Die Bedingung der Aufgabe wird also erfüllet seyn, wenn entweder $A = 7u$, oder $B = 4u$ ist. In beiden Fällen wird $x = 28u$, wo sich für u alle möglichen ganzen Zahlen substituiren lassen.

Zum Beschlusse dieses Artikels noch eine Aufgabe: „Man suche eine oder mehrere Zahlen von der Beschaffenheit,

daß sie durch 2 dividirt 1
— 3 — 2
— 4 — 3
— 5 — 4
— 6 — 5
} zum Reste lassen,

durch den Divisor 7 aber rein aufgehen."

Auflösung. Diese Zahl sey $= X$.

Wollte man nun $X = 6.u + 5$ setzen, so wären darin schon die Formen $2A + 1$, und $3B + 2$ eingeschlossen; denn jede Zahl, welche durch 6 dividirt zum Reste 5 gibt, läßt durch 2 dividirt 1, und durch 3 dividirt 2 übrig. — Doch wir wollen dieß auch algebraisch zeigen.

1) $\left.\begin{array}{l} X = 2A + 1 \\ X = 3B + 2 \end{array}\right\}$ $2A = 3B + 1$

$$A = B + C = B + \frac{B+1}{2}$$

$$B = 2C - 1;$$

folglich $\left.\begin{array}{l} X = 6C - 1 \\ 2)\ X = 6.u + 5 \end{array}\right\}$ $6C = 6.u + 6$

$$C = u + 1.$$

folglich $X = 6(u+1) - 1 = 6u + 5.$

3) $\left.\begin{array}{l} X = 6u + 5 \\ X = 4x + 3 \end{array}\right\}$ $4x = 6u + 2$

$$x = u + D = u + \frac{u+1}{2}$$

$$u = 2D - 1;$$

folglich $x = 3D - 1.$

$$X = 12D - 1.$$

4) $\left.\begin{array}{l} X = 12D - 1 \\ X = 5y + 4 \end{array}\right\}$ $5y = 12D - 5$

$$y = 2D - 1 + \tfrac{2}{5}D = 2D - 1 + E.$$

$$D = 2E + \tfrac{1}{2}E = 2E + F.$$

$$E = 2F;$$

folglich $D = 5F.$

$$y = 12F - 1.$$

$$X = 60F - 1.$$

5) $\left.\begin{array}{l} X = 60F - 1 \\ X = 7z \end{array}\right\}$

$$z = \frac{60F-1}{7} = 8F + G = 8F + \frac{4F-1}{7}$$

$$F = G + H = G + \frac{3G+1}{4}$$

$$G = H + I = H + \frac{H-1}{3}$$

$$H = 3I + 1;$$

folglich $G = 4I + 1$

$$F = 7I + 2$$

$$Z = 60I + 17$$

$$X = 420I + 119.$$

Dieses ist nun die allgemeine Formel für die in der Aufgabe bezeichneten Zahlen. Läßt man $I = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ gelten, so erhält man folgende Reihe, worin die Differenz 420 ist.

119, 539, 959, 1379, 1799, 2219, 2639 u. s. w.

Probe.

a) $\frac{112}{2}$ = Quotus 59, Rest 1.
b) $\frac{112}{3}$ = Quotus 39, Rest 2.
c) $\frac{112}{4}$ = Quotus 29, Rest 3.
d) $\frac{112}{5}$ = Quotus 23, Rest 4.
e) $\frac{112}{6}$ = Quotus 19, Rest 5.
f) $\frac{112}{7}$ = Quotus 17, Rest 0.

* Solche Aufgaben werden gewöhnlich in diese Form eingekleidet: Ein Offizier gab auf die Frage, wieviel er Leute kommandire, zur Antwort: stelle ich sie 2 Mann hoch auf, so bleibt mir einer übrig ꝛc. Oder: Eine Bäuerin gab die Zahl der zu Markte gebrachten Aepfel in der Art an: gebe ich 2 um 1 Kreuzer so bleibt mir noch einer übrig ꝛc.

Zweiter Artikel.

Unbestimmte Probleme, mit mehrern unbekannten Größen und zwei Gleichungen, oder Regel Coeci (oder Virginum.)

§. 197.

Die sogenannte Regel Coeci oder Virginum (weil die Operation ziemlich mechanisch, und daher gleichsam für Blinde und unstudirte Mädchen nicht zu schwer ist) ist im Allgemeinen eine Anleitung: aus der Summe mehrerer Produkte, von deren jedem ein Faktor, und überdieß die Summe der Mitfaktoren gegeben ist, die Mitfaktoren selbst, in ganzen Zahlen, durch unbestimmte Gleichungen zu finden. — Die Operation lernt sich am leichtesten durch Beispiele.

§. 198.

Aufgabe. I. Die Zahl 107 ist die Summe dreier Produkte, wovon das eine 9, das andere 4, das dritte 3 zum Faktor hat. Die Summe der Mitfaktoren ist 24. — Welches sind die Mitfaktoren selbst?

Auflösung. Es seyen die Mitfaktoren x, y, z.

Also $9x + 4y + 3z = 107.$

$x + y + z = 24.$

Nun multiplizire man die zweite Gleichung mit dem kleinsten Faktor der unbekannten Größen, und ziehe das Produkt von der ersten Gleichung ab.

$$9x + 4y + 3z = 107$$
$$3x + 3y + 3z = 72$$
$$6x + y \ldots = 35.$$
$$y = 35 - 6x.$$

Nun lassen sich für x alle ganzen Zahlen substituiren, die nicht größer als 5, und nicht kleiner als 3 sind;

denn da: $x + y + z = 24$

$$z = 24 - (x + y);$$

so muß $x + y < 24$ seyn.

Mithin: $x = 3, 4, 5.$
$y = 17, 11, 5.$
$z = 4, 9, 14.$

Probe. α) $9.5 + 4.5 + 3.14 = 107.$
$5 + 5 + 14 = 24.$

β) $9.4 + 4.11 + 3.9 = 107.$
$4 + 11 + 9 = 24.$

γ) $9.3 + 4.17 + 3.4 = 107.$
$3 + 17 + 4 = 24.$

Mehrere Auflösungen sind in ganzen positiven Zahlen nicht möglich.

Aufgabe. II. Ein Lehrer hat 30 Schüler, wovon einige 12, andere 11, andere 10 Jahre alt sind. Die Summe der Jahre von allen ist: 338. — Wie viele Schüler mögen von jedem dieser dreierlei Alter seyn?

Auflösung. x Schüler von 12, y von 11, z von 10 Jahren.

Also: $12x + 11y + 10z = 338$ und $x + y + z = 30$
$10x + 10y + 10z = 300$

$$2x + y = 38.$$
$$y = 38 - 2x.$$

Da nun $z = 30 - (x + y)$

$$x + y < 30;$$

so kann man für x alle ganzen Zahlen substituiren, die nicht größer als 18, und nicht kleiner als 9 sind.

$x = 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9.$
$y = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20.$
$z = 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.$

Aufgabe III. Ein Metzger kaufte 52 Stücke: Kälber, Schweine, Schafe, um 142 fl. Ein Schaf kostete 2, ein Schwein $3\frac{1}{2}$, ein Kalb 4 fl. Wie viele Stücke können es von jeder Sorte gewesen seyn?

Auflösung. Es waren x Kälber, y Schweine und z Schafe.

$4x + \frac{7}{2}y + 2z = 142$ und $x + y + z = 52.$

$8x + 7y + 4z = 284$

$4x + 4y + 4z = 208$

$4x + 3y = 76.$

$$x = \frac{76 - 3y}{4} = 19 - \tfrac{3}{4}y.$$

Man setze $y = 4A.$

$x = 19 - 3A.$

A =	1,	2,	3,	4,	5,	6.
x =	16,	13,	10,	7,	4,	1.
y =	4,	8,	12,	16,	20,	24.
z =	32,	31,	30,	29,	28,	27.

Aufgabe. IV. Ein Goldschmied hat 16löthiges, 12löthiges, 9löthiges Silber. Nun will er daraus 30 Mark 11löthiges erhalten. Wie viel kann er von jedem der dreierlei Silber in die Mischung nehmen?

Auflösung. x Mark vom 16, y vom 12, z vom 9löthigen Silber.

$16x + 12y + 9z = 330 \mid x + y + z = 30.$

$9x + 9y + 9z = 270$

$7x + 3y = 60.$

$$y = \frac{60 - 7x}{3} = 20 - \frac{7x}{3}.$$

Es sey $x = 3A.$

$y = 20 - 7A.$

A =	0,	1,	2.
x =	0,	3,	6.
y =	20,	13,	6.
z =	10,	14,	18.

Aufgabe V. Es mußten einmal 100 fl. in Bayerthalern, Laubthalern (zu $2\frac{3}{4}$ fl.), ganzen und halben Kopfstücken so bezahlt werden, daß die Anzahl der Geldstücke ebenfalls 100 betrug. Wie konnte dieß geschehen?

Auflösung. Man habe dazu u Bayerthaler, x Laubthaler, y Vierundzwanziger, z Zwölfer nothwendig.

$$\text{Also } \tfrac{12}{5}u + \tfrac{11}{4}x + \tfrac{2}{5}y + \tfrac{1}{5}z = 100.$$

Nach Hinwegschaffung der Brüche:

$$\begin{array}{r} 48u + 55x + 8y + 4z = 2000. \\ 4u + 4x + 4y + 4z = 400. \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ \hline 44u + 51x + 4y \quad = 1600. \end{array}$$

$$y = 400 - 11.u - \frac{51x}{4}.$$

Man setze $x = 4A$.

$$y = 400 - 11.u - 51.A.$$

Nun wähle man für u und A alle möglichen ganzen Zahlen, so daß y nicht 0 oder negativ werde. Um aber alle möglichen Veränderungen aufzufinden, muß man die eine Zahl, z. B. A, ruhen lassen. Da ergeben sich denn 43 Auflösungen, von welchen nur die für $A = 1$ und $A = 2$ beigefügt sind. Die übrigen, für $A = 3, 4, 5, 6, 7$ möglichen, Auflösungen können leicht in der nämlichen Art gefunden werden.

a) Wenn $A = 1$.

$u = 31, 30, 29, 28, 27, 26.$
$x = 4, 4, 4, 4, 4, 4.$
$y = 8, 19, 30, 41, 52, 63.$
$z = 57, 47, 37, 27, 17, 7.$

b) Wenn $A = 2$.

$u = 27, 26, 25, 24, 23, 22, 21.$
$x = 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8.$
$y = 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67.$
$z = 64, 54, 44, 34, 24, 14, 4.$

§. 199.

Die zusammengesetzten unbestimmten Aufgaben, d. h. diejenigen, worin die unbekannten Größen entweder als

Produkte, oder als Potenzen des zweiten, dritten und vierten Grades vorkommen, lassen sich weder nach einer allgemeinen Norm, noch jederzeit in ganzen Zahlen auflösen. Einige derselben setzen voraus, daß man wenigstens eine mögliche Auflösung wie immer, z. B. durch öftere Versuche, schon wisse. — Wir begnügen uns mit folgenden drei Problemen.

I. Zwei Quadratzahlen zu finden, deren Summe wieder ein Quadrat ist.

Auflösung. Die eine Quadratzahl heiße x^2, die andere y^2. Also $x^2 + y^2 = S^2$.

Nun bestimmt man die Wurzeln x und y durch so einen allgemeinen, korrelativen Ausdruck, daß x^2 und y^2 genau ein Quadrat hervorbringen.

Man setzt $x = 2AB$, wo für AB alle möglichen ganzen und gebrochenen Zahlen gesetzt werden können,

und $y = A^2 - B^2$. Mithin $A > B$.

Es wird also $x^2 = 4A^2B^2$

$y^2 = A^4 - 2A^2B^2 + B^4$

addirt: $x^2 + y^2 = A^4 + 2A^2B^2 + B^4 = S^2$.

$A^2 + B^2 = S$.

Es sey nun $A = 2$, $B = 1$;

so wird $x = 4$, $y = 3$ | $x^2 = 16$, $y^2 = 9$ | $x^2 + y^2 = 25$.

Es sey $A = 3$, $B = 1$; so wird $x^2 + y^2 = 36 + 64 = 100$.

$A = 3$, $B = 2$; — — $x^2 + y^2 = 144 + 25 = 169$.

$A = 1$, $B = \frac{1}{2}$; — — $x^2 + y^2 = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$ u. s. w.

II. Zwei Quadratzahlen zu finden, deren Differenz wieder ein Quadrat ist, d. i. $x^2 - y^2 = D^2$.

Auflösung. Es sey $x = A^2 + B^2$

$y = 2AB$

$x^2 = A^4 + 2A^2B^2 + B^4$

$y^2 = 4A^2B^4$

$x^2 - y^2 = A^4 - 2A^2B^2 + B^4 = D^2$.

$A^2 - B^2 = D$.

Es sey $A = 4$, $B = 1$; so wird $x^2 - y^2 = 289 - 64 = 225$.
$A = 4$, $B = 2$; — — $x^2 - y^2 = 400 - 256 = 144$.
$A = 4$, $B = 3$; — — $x^2 - y^2 = 625 - 576 = 49$ u. s. w.

III. Eine oder mehrere Zahlen zu finden, deren Quadrat, um 4 vermehrt, ein reiner Kubus wird.

Auflösung. Es sey die Zahl $= x$, so erhält man die Gleichung: $\sqrt[3]{x^2 + 4} = R$.

Hier ist nun unumgänglich nothwendig, wenigstens einen Fall zu wissen, wo die Formel $x^2 + 4$ ein reiner Kubus wird. Ein solcher Fall ist, wenn ich $x = 2$ setze. Denn $x^2 + 4 = 8$.

Man setzt also $x = 2 + A$, und substituirt in der ersten Gleichung: $\sqrt[3]{8 + 4A + A^2} = R$.

Man setze: $R = 2 + \frac{1}{3}A$.

$$\sqrt[3]{8 + 4A + A^2} = 2 + \tfrac{1}{3}A.$$

kubirt: $8 + 4A + A^2 = 8 + 4A + \frac{2}{3}A^2 + \frac{1}{27}A^3$

$9 = A$, mithin $x = 11$.

Probe. $x^2 + 4 = 121 + 4 = 125 = 5^3$.

Aus diesem zweiten Falle läßt sich ein dritter eruiren, wenn man $x = 11 + B$ setzt, und

$$\sqrt[3]{125 + 22B + B^2} = 5 + BC.$$

kubirt: $125 + 22B + B^2 = 125 + 75BC + 15B^2C^2 + B^3C^3$.

Um $75BC$ gegen $22B$ aufheben zu können, sey $C = \frac{22}{75}$, so erhält man $B = -\frac{122625}{10648}$,

folglich $x = -\frac{5497}{10648}$.

Probe. $x^2 + 4 = \frac{483736625}{113379904} = \left(\frac{785}{484}\right)^3$.

Verbindet man den ersten und zweiten Fall miteinander, und setzt $x = \frac{2 + 11D}{1 \pm D}$ (denn ist $D = 0$, so wird $x = 2$; ist aber D unendlich groß, so wird $x = 11$); so ergeben sich wieder zwei neue Fälle.

Also vierter Fall: $x = \frac{2 + 11D}{1 + D}$

$$x^2 + 4 = \frac{8 + 52D + 125D^2}{(1 + D)^2} = \frac{8 + 60D + 177D^2 + 125D^3}{(1 + D)^3}.$$

Setzt man nun die Kubikwurzel hiervon $= E + 5D$, deren Kubus: $E^3 + 15E^2D + 75ED^2 + 125D^3$ ist,

und $E = \frac{177}{75} = \frac{59}{25}$;

so wird $D = -\frac{80379}{367875}$

und $x = -\frac{148419}{287496} = -\frac{5497}{10648}$ u. s. w.

Fünfter Fall: $x = \frac{2+11D}{1-D}$

$$x^2 + 4 = \frac{8+36D+125D^2}{(1-D)^2} = \frac{8+28D+89D^2-125D^3}{(1-D)^3}.$$

Setzt man die Kubikwurzel hiervon $= 2 - 5D$, deren Kubus: $8 - 60D + 150D^2 - 125D^2$ ist;

so wird $D = \frac{88}{61}$, und $x = -\frac{1029}{27}$.

Probe. $x^2 + 4 = \frac{1191016}{729} = (\frac{196}{9})^2$.

§. 200.

Anmerkungen.

I. Manchmal scheint eine Aufgabe von mehrern Unbekannten bestimmt zu seyn, — indem sich daraus eben so viele Gleichungen ableiten lassen, als Unbekannte vorhanden sind, — ohne es wirklich zu seyn. Dieß ist dann der Fall, wenn eine der Gleichungen nur eine Ableitung aus einer oder aus einigen der andern gegebenen Gleichungen ist.

Z. B. Man hätte die Aufgabe:

$$\begin{aligned} v + x + y + z &= 54 \\ x + y &= 31 \\ x - v &= 12 \\ x + z &= 35. \end{aligned}$$

Man addire die drei letzten Gleichungen, und subtrahire davon die erste, so erhält man:

$$\begin{array}{rrrrr} 3x & + y & + z & - v & = 78 \\ x & + y & + z & + v & = 54 \\ - & - & - & - & - \\ \hline 2x & - 2v & = & 24 & \\ x & - v & = & 12 & \end{array}$$

Addirt man die zweite und vierte, und subtrahirt davon die dritte, so erhält man wieder die erste.

Man gelangt daher zu keiner größern Bestimmtheit, als zu der:

$$x = 54 - y - z - v,$$
$$y = 31 - x$$
$$v = x - 12$$
$$z = 35 - x$$

Will man die vier Unbekannten in positiven ganzen Zahlen haben, so muß $x < 31$ und $x > 12$ seyn. Hat man x gefunden, so ist auch schon die ganze Aufgabe gelöset.

$$x = 30, 29 \ldots\ldots\ldots 13$$
$$y = 1, 2 \ldots\ldots\ldots 18$$
$$v = 18, 17 \ldots\ldots\ldots 1$$
$$z = 3, 6 \ldots\ldots\ldots 22$$

II. Sind mehr Gleichungen gegeben, als Unbekannte vorkommen, so lassen sie sich immer auf Gleichungen mit einer Unbekannten zurückführen. Soll dann eine solche Aufgabe möglich seyn, so müssen die bekannten Größen der Gleichungen in einem solchen bestimmten Verhältnisse zu einander stehen, daß jede Gleichung mit einer andern identisch ist.

II. Abschnitt.

Von den Verhältnissen, Proportionen und Progressionen.

Vorbegriffe.

§. 201.

Wenn man zwei Größen, z. B. a und b, so miteinander vergleicht, daß die eine das Maß der andern wird, so erhält man ein mathematisches Verhältniß. Ein mathematisches Verhältniß ist also die Bestimmung einer Größe a durch Vergleichung mit einer zweiten Größe b.

Anmerkungen.

1. Da sich nur gleichartige Größen zum Maße dienen, so folgt, daß nur gleichartige Größen miteinander in ein Verhältniß gebracht werden können.

2. Größen, welche auf diese Art durch Vergleichung mit einer andern bestimmt werden, müssen überdieß von der Art seyn, daß sie sich zählen, oder wie immer durch Zahlen ausdrücken lassen. Und so kann man am Ende jedes mathematische Verhältniß in ein bloßes Zahlenverhältniß auflösen.

§. 202.

Bei Vergleichung zweier Zahlengrößen (stummer oder benannter) ist ein doppelter Zweck möglich. Entweder verlangt man zu wissen, um wie viele Einheiten die eine Größe mehr oder weniger habe, als die andere; oder das Wievielte der einen Größe die andere sey.

Die erste Bestimmung, welche sich aus der Subtraktion ergibt, heißt das arithmetische; und jene, welche sich aus der Division ergibt, heißt das geometrische Verhältniß zweier Größen. Jenes fordert das Subtraktions-, dieses das Divisionszeichen, welche Zeichen zwischen die verglichenen Größen gesetzt werden.

Z. B. 3 — 7	sind arithmetische	3 : 6	sind geometrische Verhältnisse.
4 — 8		4 : 8	
a — b		a : b	

Anmerkung. 1) In dem arithmetischen Verhältnisse werden zwei Größen als Summen, im geometrischen aber als Produkte verglichen.

2) Arithmetisch heißt das Verhältniß, weil darin bloß der Zahlenunterschied (Ἀριθμὸς, die Zahl) berücksichtiget wird. Bei dem geometrischen Verhältnisse ist die eine Größe das Maß oder die Einheit, mit welcher die andere ausgemessen wird, so wie man ein Stück Landes ausmißt (γεωμετρεῖν), indem man eine kleinere Fläche, z. B. einen Quadratfuß, so oft als möglich in dasselbe hineinträgt. Doch könnte der Name des geometrischen Verhältnisses auch daher geleitet werden, daß man die erste Abhandlung darüber in den Elementen der Geometrie von Euklides findet.

§. 203.

In jedem Verhältnisse unterscheidet man dreierlei Größen.

1) Die zwei verglichenen Größen a — b, oder a : b (Glieder des Verhältnisses, Termini), wovon das erste und

voranstehende das Vorderglied (antecedens), das zweite und nachstehende aber das Hinterglied (consequens) heißt.

2) Die durch das Verhältniß bestimmte Größe x, welche bei arithmetischen Verhältnissen die Differenz (d), bei geometrischen der Quotus (q) ist, und der Verhältniß-Exponent oder Zeiger (nomen rationis) genannt wird.

§. 204.

Verhältnisse heißen oder sind:

1) steigend, wenn das consequens größer ist, als das antecedens, z. B. $6 - 9$ / $6 : 18$;

2) fallend, wenn das consequens kleiner ist, als das antecedens, z. B. $10 - 4$ / $48 : 6$;

3) gleich, wenn die Verhältnißexponenten die nämlichen sind,

z. B. $5 \overset{6}{-} 11$, $7 \overset{6}{-} 13$ } gleiche arithmetische

$2 \overset{2}{:} 4$, $3 \overset{2}{:} 6$ } gleiche geometrische Verhältnisse;

4) ungleich, wenn die Verhältnißexponenten verschieden sind,

$3 \overset{1}{-} 4$, $5 \overset{4}{-} 9$ } ungleiche arithmetische,

$3 \overset{2}{:} 6$, $4 \overset{3}{:} 12$ } ungleiche geometrische Verhältnisse.

§. 205.

In jedem Verhältnisse hat eine doppelte Beziehung der verglichenen Größen, also auch ein zweifacher Exponent statt. (§. 202.)

Z. B. in dem Verhältnisse $5 - 7$ kann der Exponent $+ 2$, oder $- 2$ seyn, je nachdem ich die kleinere Zahl von der größern, oder die größere von der kleinern abziehe. Und in dem geometrischen $3 : 9$ ist der Exponent entweder 3, wenn ich 9 durch 3, oder $\frac{1}{3}$, wenn ich 3 durch 9 dividire. — Es ist im Grunde einerlei, auf welche Art man den Verhältnißexponenten sucht, wenn man sich nur immer gleich bleibt; doch — da ohnehin die Ver-

hältnisse keine bloße Subtraktion und Division bezeichnen — ist es in mancher Rücksicht vortheilhafter, den Verhältnißexponenten bei arithmetischen dadurch zu finden, daß man das antecedens von dem consequens abzieht; bei geometrischen Verhältnissen aber, daß man das consequens durch das antecedens dividirt.

§. 206.

Nach dieser Voraussetzung ist der allgemeine Ausdruck eines arithmetischen Verhältnisses: $a - (a + d)$; eines geometrischen aber: $a : aq$.

Denn wenn $a - b$ jedes arithmetische Verhältniß

und $a : b$ jedes geometrische Verhältniß bezeichnen kann, und überdieß $b - a = d$

$b : a = q$ ist;

so ist auch $b = a + d$

$b = aq$.

Durch Substitution ergibt sich endlich $a - (a + d)$

$a : aq$.

Aus gleichem Grunde ist $b - (b + d)$ ein arithmetisches

und $b : bq$ ein geometrisches Verhältniß; und zwar sind sowohl die beiden arithmetischen, als auch die beiden geometrischen Verhältnisse einander gleich, weil ihr Exponent der nämliche ist. (§. 204).

§. 207.

Zwei gleiche Verhältnisse mittelst des Gleichheitszeichens zusammengestellt geben eine Proportion; und zwar

1) eine arithmetische, wenn die Verhältnisse arithmetisch,
2) eine geometrische, wenn die Verhältnisse geometrisch sind.

Der allgemeine Ausdruck einer arithmetischen Proportion ist:

$$a - (a + d) = b - (b + d).$$

Der einer geometrischen aber:

$$a : aq = b : bq. \text{ (§. praec.)}$$

Erklärungen.

Man nennt

a) das erste und letzte Glied einer Proportion die äußern Glieder (termini extremi),

b) das zweite und dritte die mittlern Glieder (termini medii),

c) die beiden Vorder- oder die beiden Hinterglieder homologe oder gleichnamige Glieder (termini homologi).

§. 208.

Wenn in einer Proportion die innern Glieder einander gleich sind, so heißt sie stätig oder fließend (continua); widrigenfalls diskret.

2 — 5 = 5 — 8 stätige arithmetische
2 : 4 = 4 : 8 stätige geometrische Proportion.

Man schreibt dergleichen stätige Proportionen, Kürze halber, nur mit drei Gliedern, indem man das mittlere Glied nur einmal setzt; dieses Glied heißt dann die mittlere Proportionalzahl.

2 — 5 — 8. Differenz 3.
2 : 4 : 8. Quotus 2.

Folgesätze. 1) In einer stätigen arithmetischen Proportion (aus drei Gliedern) ist zwischen einem jeden vorhergehenden Gliede und seinem nachfolgenden die nämliche Differenz.

2) In einer stätigen geometrischen Proportion gibt jedes vorhergehende Glied mit seinem nachfolgenden einerlei Quotus.

§. 209.

Eine Folge von Zahlen, von welchen je drei unmittelbar auf einander folgende eine stätige Proportion bilden, heißt eine Progression oder Reihe im engern Sinne.

1 — 3 — 5 — 7 — 9 — 11 arithmetische
1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 geometrische Progression.

In jeder arithmetischen oder geometrischen Progression heißen alle Glieder, außer dem ersten, Hinterglieder; und alle, außer dem letzten, Vorderglieder.

So viel haben die arithmetischen und geometrischen Verhältnisse und Proportionen mit einander gemein. Die Natur der Sache fordert nun, daß das Eigenthümliche derselben auch getrennt behandelt werde. Die Ordnung, in welcher dieses geschieht, ist folgende:

Erstes Hauptstück. Von den arithmetischen Proportionen und Progressionen.

Zweites Hauptstück. Von den geometrischen Proportionen und Progressionen.

Aus der Verbindung einer arithmetischen und geometrischen Progression ergeben sich die Logarithmen; also:

Drittes Hauptstück. Von den Logarithmen.

Jedes Hauptstück zerfällt, nach Erforderniß des zu behandelnden, mehr oder weniger reichhaltigen, Stoffes wieder in mehrere oder wenigere Artikel.

Anmerkung. Vor der eigentlichen Proportionslehre muß noch die Natur der Verhältnisse näher bestimmt werden.

I. Hauptstück.

Von den arithmetischen Proportionen und Progressionen der Zahlen.

---

§. 210.

Gesetze der arithmetischen Verhältnisse.

I. Jedes arithmetische Verhältniß bleibt unverändert, wenn man das Antecedens und Konsequens um eine beliebige Zahl, z. B. m, vermehrt oder vermindert:

$$a-(a+d)=(a\pm m)-(a+d\pm m).$$

II. Ein arithmetisches Verhältniß, welches aus gebrochenen Zahlen eines verschiedenen Nenners besteht, läßt sich in ein anderes verwandeln, worin die Nenner gleich sind. Doch muß der gemeinschaftliche Nenner ausdrücklich stehen.

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=\frac{2-3}{4}=\frac{4-6}{8}.$$

$$\frac{a}{b}-\frac{a+d}{c}=\frac{ac-(ab+bd)}{bc}.$$

III. Würden und Wurzeln passen nur in so fern zu einem arithmetischen Verhältnisse, als sie förmlich subtrahirt werden können, d. h. ganz gleichartig sind.

$$a^2 - 3a^2 = 5a^2 - 7a^2$$
$$2\sqrt{x} - 7\sqrt{x} = 5\sqrt{x} - 10\sqrt{x}.$$

Was nun von einzelnen Verhältnissen gilt, muß auch von der Proportion selbst gelten.

Erster Artikel.

Arithmetische Proportion.

§. 211.

Gesetze der arithmetischen diskreten Proportion.

I. In der diskreten arithmetischen Proportion ist die Summe der äußern Glieder der Summe der mittlern gleich.

Denn da: $a - (a+d) = b - (b+d)$ (§. 207),
so ist: $a + (b+d) = (a+d) + b$
$a + b + d = a + b + d.$
$5 - 11 = 7 - 13.$
$5 + 13 = 11 + 7.$
$18 = 18.$

II. Zu drei gegebenen Zahlen findet man die vierte, unbekannte, Proportionalzahl (x), wenn man die Summe der äußern Glieder jener der innern gleich setzt, und von x die bekannte Größe durch Subtraktion hinwegschafft.

Z. B. a) $3 - 7 = 8 - x$
$x + 3 = 15$
$x = 12$

also $3 - 7 = 8 - 12.$

Oder b) $5 - 19 = x - 30$
$x + 19 = 35$
$x = 16$

also $5 - 19 = 16 - 30.$

Folgesatz. Wenn die Summe zweier Zahlen (z. B. $3 + 20$) der Summe zweier anderer (z. B. $16 + 7$) gleich ist, so stehen diese Zahlen jedesmal in einer arithmetischen Proportion, wenn man nur die Zahlen der einen Summe zu den äußern, die der andern zu den mittlern Gliedern macht.

$3 - 7 = 16 - 20$
oder $3 - 16 = 7 - 20$ u. s. w.

Wenn $a + b = c + d$, so ist $a - c = d - b$.

§. 212.

Lehrsatz. Die allgemeine Form der stätigen arithmetischen Proportion ist: $a - (a + d) - (a + 2d)$.

Beweis. Man verwandle die stätige Proportion in eine diskrete, worin das letzte Glied unbekannt ($= x$) ist, und bestimme dieses nach §. praec.

$$a - (a + d) - x, \text{ oder}$$
$$a - (a + d) = (a + d) - x$$
$$x + a = 2a + 2d$$
$$-a = -a$$
$$\overline{x = a + 2d.}$$

Substituirt: $a - (a + d) = (a + d) - (a + 2d)$;
oder: $a - (a + d) - (a + 2d)$.

§. 213.

Gesetze der arithmetischen stätigen Proportion.

I. In der stätigen arithmetischen Proportion ist die Summe der äußern Glieder dem Doppelten des mittlern Gliedes gleich.

$$a - (a + d) - (a + 2d)$$
$$a + (a + 2d) = 2(a + d)$$
$$2a + 2d = 2(a + d)$$

II. Um zu zwei gegebenen Zahlen die dritte arithmetische Proportionalzahl zu finden, betrachtet man diese als das unbekannte Glied (x), bildet aus der Summe der äußern Glieder und dem doppelten mittlern Gliede eine Gleichung, und schafft die bekannten Größen von x nach den Regeln der Gleichungen hinweg.

Aufgabe. Man suche zu 18,29 die dritte arithmetische Proportionalzahl, so daß x auf der ersten und zweiten Stelle zu stehen komme.

Auflösung. a) $x - 18 - 29$
$$x + 29 = 36$$
$$x = 36 - 29 = 7.$$

b) $18 - x - 29$
$$2x = 47$$
$$x = \frac{47}{2} = 22\frac{1}{2},$$

d. i.: die mittlere arithmetische Proportionalzahl zweier Zahlen ist ihrer halben Summe gleich.

Folgesatz. Wenn die Summe zweier Zahlen (z. B. 3 und 7 = 10) dem Doppelten einer andern (z. B. 5) gleich ist, so ist die letzte die mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen den beiden andern.

$$3 - 5 - 7$$
$$2 \times 5 = 3 + 7$$
$$10 = 10.$$

Wenn $a + b = 2c$, so ist $a - c - b$.

Zweiter Artikel.

Arithmetische Progression.

§. 214.

Progression oder Reihe im weitern Sinne heißt eine Folge von Zahlen, welche nach dem nämlichen bestimmten Gesetze gebildet sind. Besteht das Gesetz darin, daß die Zahlen nach bestimmten Differenzen steigen oder fallen, so heißt die Reihe arithmetisch, und zwar des ersten Grades, wenn die ersten Differenzen gleich sind; sind erst die zweiten Differenzen, d. i. die Differenzen der ersten Differenzen gleich, so heißt die Reihe eine arithmetische Reihe des zweiten Grades. Bei den Reihen des dritten Grades sind die dritten Differenzen gleich u. s. w. Hier zunächst von den arithmetischen Reihen des ersten Grades.

Nennt man bei den arithmetischen Reihen des ersten Grades die Differenz allgemein $\pm d$, weil die Reihe steigend oder fallend seyn kann, und das erste Glied $= a$; so hat man für alle arithmetische Progressionen des ersten Grades die allgemeine Form:

$a,\ a \pm d,\ a \pm 2d,\ a \pm 3d,\ a \pm 4d,\ a \pm 5d,\ a \pm 6d.$ u. s. w.

Da nun die arithmetische Progression nur eine fortgesetzte stätige Proportion ist, so müssen jedesmal drei unmittelbar auf einander folgende Glieder wieder eine stätige arithmetische Proportion geben.

z. B. $a - (a \pm d) - (a \pm 2d)$
$(a \pm d) - (a \pm 2d) - (a \pm 3d)$
$(a \pm 2d) - (a \pm 3d) - (a \pm 4d)$ u. s. w.

§. 215.

Betrachtet man diese allgemeine arithmetische Reihe aufmerksam, so zeigt sich:

1) daß jedes Glied derselben die Summe aus dem ersten Gliede und einer so vielfachen Differenz sey, als Glieder vorausgehen;

2) daß folglich, wenn p die Anzahl der Glieder bedeutet, wo die Reihe abgebrochen wird, das allgemeine Glied sey

$$a \pm d\,(p-1);$$

3) daß, wenn man die Anzahl aller gegebenen Glieder n, und das letzte Glied z heißt,

$$z = a \pm d\,(n-1),$$

und das vorletzte Glied $y = a \pm d\,(n-2)$ u. s. w. seyn müsse.

§. 216.

Nach diesen Voraussetzungen ergibt sich für eine geschlossene Progression als allgemeine Formel:

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ a+4d \ldots\ a+d\,(n-2),\ a+d\,(n-1).$$

Es sey $a = 1$,
$d = 4$,
$n = 20$; so entsteht die Progression:

1, 5, 9, 13, 17 ..... 73, 77;
so daß $z = 77$.

Da nun in der Formel $z = a + d\,(n-1)$ auch noch die Größen a, d, n vorkommen, so können sie ebenfalls allgemein daraus bestimmt werden.

Nämlich 1) $a = z - d\,(n-1)$.

2) $d = \frac{z-a}{n-1}$.

3) $n = \frac{z-a+d}{d} = \frac{z-a}{d} + 1$.

Substituirt man nun aus der obigen Progression für z, d, n, a ihre Werthe, so ergibt sich die Richtigkeit des Verfahrens:

1) $a = 77 - (4.19) = 77 - 76 = 1$.

2) $d = \frac{77-1}{20-1} = \frac{76}{19} = 4$.

3) $n = \left(\frac{77-1}{4}\right) + 1 = 19 + 1 = 20$.

§. 217.

Lehrsatz. Die Summe zweier Glieder, deren eines eben so weit von dem ersten Gliede als das andere von dem letzten Gliede entfernt ist, ist der Summe des ersten und letzten Gliedes gleich.

Beweis. Ein Glied, welches die m^{te} Stelle nach dem ersten einnimmt, ist $= a + d \times m$; und ein Glied in der m^{ten} Stelle vor dem letzten Gliede $= a + d\,(n - 1 - m)$; daher die Summe $2a + d\,(n - 1) = a + z$. (§. praec.)

Diese Wahrheit wird anschaulich, wenn man eine arithmetische Reihe doppelt, aber in verkehrter Ordnung unter einander schreibt.

Erstes Beispiel, wo die Anzahl der Glieder gerade ist.

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29
29, 26, 23, 20, 17, 14, 11, 8, 5, 2

31, 31, 31, 31, 31, 31, 31, 31, 31, 31.

Zweites Beispiel, wo die Anzahl der Glieder ungerade ist.

4, 6, 8, 10, 12, 14, 16
16, 14, 12, 10, 8, 6, 4

20, 20, 20, 20, 20, 20, 20.

Nennt man nun in dieser Reihe (und allen jenen), worin die Gliederzahl ungerade ist, das mittlere Glied m, die Summe des ersten und letzten Gliedes aber $a + z$: so ist offenbar, daß

$$2m = a + z$$

$$m = \frac{a + z}{2}.$$

§. 218.

Aufgabe. Die Summe einer arithmetischen Progression zu finden.

Auflösung. Man schreibe die allgemeine Formel arithmetischer Reihen doppelt und in verkehrter Ordnung untereinander, und nenne ihre Summen $= S$. Addirt man nun beide Reihen, so enthält die Summe $2S$ offenbar n mal die Summe $(a + z)$, (§. 217. u. §. 29. I.) woraus sich der Werth für das einfache S finden läßt.

$$S = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots . a + d(n-2) + z.$$
$$S = z + a + d(n-2) + \ldots\ldots\ldots (a+d) + a.$$

$$2S = (a+z)n \quad (\S.\ \text{praec.})$$

$$S = \left(\frac{a+z}{2}\right)^n \text{ oder } = (a+z)\frac{n}{2}.$$

Mit Worten ausgedrückt heißt diese Formel: Man findet die Summe einer arithmetischen Reihe, wenn man die halbe Summe des ersten und letzten Gliedes mit der ganzen Gliederanzahl multiplizirt; — oder: Wenn man die Summe des ersten und letzten Gliedes mit der halben Gliederzahl multiplizirt.

§. 219.

Aus dieser Formel lassen sich wieder neue Werthe für a, z und n finden.

Nämlich 1) $a = \frac{2S - nz}{n}$.

2) $z = \frac{2S - an}{n}$.

3) $n = \frac{2S}{a+z}$.

Stellt man nun diese drei Werthe mit jenen §§. 215. 216. gefundenen zusammen, so erhält man drei neue Gleichungen; und da von den vier vorkommenden Größen jede die gesuchte seyn kann, so ergeben sich $3 \times 4 = 12$ neue Formeln. Dazu noch die bisher gefundenen acht addirt, gibt es zwanzig verschiedene Formeln.

Man bestimme z. B. aus a, d und S das n und z.

Die beiden Grundgleichungen sind:

$$z = a + d(n-1)$$
$$S = (a+z)\frac{n}{2}.$$

Den Werth von z in den von S substituirt, gibt

$$S = (a + a + d(n-1))\frac{n}{2}.$$
$$S = (2a + dn - d)\frac{n}{2}$$
$$2S = 2an + dn^2 - dn$$

$$n^2 - \left(\frac{d-2a}{d}\right)n = \frac{2S}{d}$$

$$n^2 - \left(\frac{d-2a}{d}\right)n + \left(\frac{d-2a}{2d}\right)^2 = \frac{2S}{d} + \left(\frac{d-2a}{2d}\right)^2$$

$$n - \frac{d-2a}{2d} = \pm\sqrt{\frac{8dS+(d-2a)^2}{4d^2}}$$

$$n = \frac{d-2a \pm \sqrt{8dS+(d-2a)^2}}{2d}$$

$$z = a + d(n-1) = a - d + d\left(\frac{d-2a \pm \sqrt{8dS+(d-2a)^2}}{2d}\right)$$

$$= \frac{-d \pm \sqrt{8dS+(d-2a)^2}}{2}$$

Nro.	Zu suchende Größe.	Gegeben ist.	Formeln.
I.	a.	z. d. n.	$z - d(n-1)$
II.		z. n. S.	$\frac{2S-nz}{n}$.
III.		d. n. S.	$\frac{S}{n} - \frac{d(n-1)}{2}$.
IV.		z. d. S.	$\frac{d \pm \sqrt{-8dS+(d+2z)^2}}{2}$.
V.	z.	a. d. n.	$a + d(n-1)$.
VI.		a. n. S.	$\frac{2S-an}{n}$.
VII.		d. n. S.	$\frac{S}{n} + d\left(\frac{n-1}{2}\right)$.
VIII.		a. d. S.	$\frac{-d \pm \sqrt{8dS+(2a-d)^2}}{2}$.

Nro.	Zu suchende Größe.	Gegeben ist.	Formeln.
IX.	d.	a. z. n.	$\frac{z-a}{n-1}$.
X.		a. n. S.	$\frac{2S-2an}{n(n-1)}$.
XI.		z. n. S.	$\frac{2nz-2S}{n(n-1)}$.
XII.		a. z. S.	$\frac{(z+a).(z-a)}{2S-a-z}$.
XIII.	n.	a. d. z.	$1+\frac{z-a}{d}$.
XIV.		a. S. z.	$\frac{2S}{a+z}$.
XV.		a. d. S.	$\frac{d-2a\pm\sqrt{8dS+(2a-d)^2}}{2d}$.
XVI.		d. S. z.	$\frac{d+2z\pm\sqrt{-8dS+(d+2z)^2}}{2d}$.
XVII.	S.	a. n. z.	$(a+z)\times\frac{n}{2}$.
XVIII.		a. d. n.	$n\times\left(a+d\times\frac{n-1}{2}\right)$.
XIX.		d. n. z.	$n\times\left(z-d\times\frac{n-1}{2}\right)$.
XX.		a. d. z.	$\frac{(z+a)\times(d+z-a)}{2d}$.

Anmerkung. Alle diese Formeln sind zunächst für die steigenden Progressionen berechnet; hat man also eine fallende Progression zu behandeln, so verwandelt man sie zuerst in eine

steigende, dadurch, daß man sie verkehrt anschreibt, d. i. das erste Glied zum letzten, und das letzte zum ersten macht, und die Differenz positiv setzt.

Z. B. Die fallende Progression (oder vielmehr Degression): 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2 wird in eine steigende verwandelt, wenn ich

$$a = 2$$
$$z = 16$$
$$d = +2 \text{ setze.}$$

§. 220.

Aufgaben.

I. Wie viele Schläge macht der Hammer einer gewöhnlichen Stundenuhr innerhalb eines Jahres?

Auflösung. Zuerst suche man die Schläge für Tag und Nacht.

$$a = 1,\ z = 12,\ n = 12.$$

$S = 13 \times 6 = 78$ Schläge innerhalb eines Tages.
78 — für die Nacht.

156 für einen mathematischen Tag.

$156 \times 365 = 56940$ Schläge innerhalb eines gemeinen Jahres.

II. Es hatte Jemand einen Brunnen graben lassen, und für den ersten Fuß in die Tiefe 2 fl., für jeden folgenden $\frac{1}{2}$ fl. mehr, in allem aber 1005 fl. bezahlt. Wie viele Fuß tief war der Brunnen geworden?

Auflösung. Hier ist $a = 2$, $d = \frac{1}{2}$, $S = 1005$, n aber unbekannt; die Auflösung geht also nach Formel XV.

$$n = \frac{d - 2a \pm \sqrt{8dS + (2a - d)^2}}{2d}$$

$$n = \tfrac{1}{2} - 4 \pm \sqrt{\frac{16129}{4}} = \frac{1}{2} + \frac{127}{2} - 4 = 60.$$

Also war der Brunnen 60 Fuß tief geworden.

III. Es soll ein Kapital von 10000 fl., welches zu 5 p. c. ausgeliehen worden, in 11 gleichen Termingeldern zurückbezahlt werden, ohne daß jedoch Zinszinsen in Anschlag gebracht werden. Was beträgt ein Termingeld?

Auflösung. Die Zinsen von 10000 fl. in 11 Jahren betragen $10000 . \frac{11.5}{100}$ fl., vom ersten Termingelde $= x$, da sie für den Gläubiger noch auf 10 Jahre berechnet werden können, $x . \frac{10.5}{100}$, vom zweiten Termingelde $= x$ bei neunjähriger Verzinsung $x . \frac{9.5}{100}$, ... vom zehnten Termingelde $x . \frac{1.5}{100}$, vom letzten 0. Daher

$$10000 . \frac{11.5}{100} = (x + x . \frac{10.5}{100}) + (x + x . \frac{9.5}{100}) + \ldots\ldots (x + x . \frac{1.5}{100}) + x.$$

(Vergl. §. 144. XVI. 3.)

Für die Reihe, welche die Glieder der zweiten Seite der Gleichung bilden, ist, wenn man sie in verkehrter Ordnung nimmt, $a = x$, $n = 11$, $z = x + x . \frac{10.5}{100} = x + \frac{1}{2}x$; folglich $S = (x + x + \frac{1}{2}x)\frac{11}{2}$, und $10000 + 5500 = (x + x + \frac{1}{2}x)\frac{11}{2}$

$$x = 1127\tfrac{3}{11} \text{ fl.}$$

IV. Einem Bedienten wurde bei seinem Dienstesantritte von der Herrschaft versprochen, daß, wenn er stets zu deren Zufriedenheit diente, sein Lohn jährlich um gleich Vieles erhöht werden sollte. Nun hatte er im dritten und vierten Jahre zusammen 115 fl., im sechsten und zehnten Jahre 142 fl., während der ganzen Diensteszeit 1160 fl. erhalten. Was erhielt er im ersten, zweiten und letzten Dienstjahre? Wie lange stand er im Dienste?

Auflösung.

$$(a + 2d) + (a + 3d) = 115 \text{ oder } 2a + 5d = 115$$
$$(a + 5d) + (a + 9d) = 142 \qquad 2a + 14d = 142$$
$$9d = 27,\ d = 3$$
$$2a + 5.3 = 115,\ a = 50,\ z \text{ (nach VIII.)} = 95,\ n \text{ (nach XIII.)} = 16.$$

V. Welches ist im Allgemeinen die Summe einer arithmetischen Progression, die sich mit 1 anfängt, und deren Gliederzahl $= n$, die Differenz aber $= d$ ist?

Auflösung. Da hier aus den gegebenen Größen a, d, n die Größe S gefunden werden soll, so muß die XVIII. Formel genommen werden.

$$S = n \times \left(a + d \times \frac{n-1}{2}\right)$$

Aber $a = 1$.

$$S = n \times \left(1 + d \times \frac{n-1}{2}\right) = n \times \left(1 + \frac{dn-d}{2}\right).$$

$$S = n + \frac{dn^2 - dn}{2} = n + \frac{(n^2-n)d}{2}$$

....

$$S = n + \frac{n(n-1)d}{2}.$$

§. 221.

Sollen zwischen ein paar Gliedern einer Progression ν andere Glieder interpolirt, d. i. so eingeschaltet werden, daß sie mit jenen beiden Gliedern und unter sich wieder eine arithmetische Progression bilden; so wird für solche die Differenz $\delta = \frac{1}{\nu+1} d$ seyn, weil die zwischen zwei Gliedern der gegebenen Reihe Statt findende Differenz d unter die einzuschaltenden Glieder und das nächste Glied der Hauptreihe, also in $\nu + 1$ gleiche Theile getheilt werden muß. Es ist demnach das erste nach dem m^{ten} Gliede der Hauptreihe einzuschaltende Glied =

$$a + d(n-1) + \frac{1}{\nu+1} d = a + d\left(n + \frac{1}{\nu+1} - 1\right)$$

das m^{te} einzuschaltende Glied =

$$a + d\left(n + \frac{m}{\nu+1} - 1\right).$$

Z. B. Wenn in der Reihe 1, 15, 29 .... zwischen dem achten und neunten Gliede 6 Glieder eingeschaltet werden, wie heißt davon das vierte?

$$a = 1,\ d = 14,\ n = 8,\ \nu = 6,\ m = 4$$

Das verlangte Glied $= 1 + 14(8 + \frac{4}{7} - 1) = 1 + 14(7 + \frac{4}{7}) = 107$.

Das achte Glied der Reihe, die 6 einzuschaltenden Glieder und das neunte Glied sind:

99, 101, 103, 105, 107, 109, 111, 113.

Dritter Artikel.

Von den vieleckigen oder Polygonal-Zahlen.

§. 222.

Die Summation der arithmetischen Progressionen, welche von 1 anfangen, und deren Differenz der Ordnung nach 1, 2, 3, 4

u. s. w., oder überhaupt eine ganze Zahl ist, führt auf die Lehre von den vieleckigen oder Polygonal-Zahlen, welche entstehen, wenn man einige Glieder einer solchen Progression zusammenzählt. — Vieleckige, oder Polygonalzahlen heißen sie, weil sich so viel Punkte, als eine solche Zahl Einheiten hat, als Drei-, Vier-, Fünf-, überhaupt M-Ecke darstellen lassen.

Bei diesen Zahlen sind vorzüglich zwei Größen zu unterscheiden:

1) Die Größe n, welche anzeigt, a) wie viele Glieder der Progression addirt worden, und b) wie viele Punkte eine Seite des MEckes habe; daher sie auch schlechtweg die Seite oder Seitenzahl heißt.
2) Die Größe M, welche die Anzahl der Winkel bedeutet, wovon das Vieleck benannt wird.

I. Ursprung der dreieckigen Zahlen.

Man setze die Differenz = 1, so entsteht die Progression:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 . . . n.

Nimmt man nun außer dem ersten Gliede noch die Summe von zwei, drei, vier — n Gliedern; so erhält man die dreieckigen Zahlen, wie sie folgende Reihe darstellt:

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55 . . .

Figur 1. 3. 6. 10. 15.

. . . . . u. s. w.

Ist nun die Seite des Dreyecks allgemein = n, so ist die aus §. 220. V. für d = 1 abgeleitete Formel für alle dreieckigen Zahlen:

$$= \frac{(1+n)n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

* Es sey z. B. n = 5, so wird die dreieckige Zahl von 5 seyn $\frac{(1+5)5}{2} = 3.5 = 15$, wie oben.

II. Ursprung der viereckigen Zahlen.

Man setze die Differenz = 2, so ergibt sich die Reihe:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 . . . . n,

wovon die Summen die Quadrate der natürlichen Zahlen geben, die sich durch Vierecke ausdrücken lassen.

1 4 9 16 25 u. s. w.

. .. .
.. ..
... .
....
.....

Ist nun allgemein die Seite = n, so ist die Formel für die viereckigen Zahlen: $S = n^2$.

III. So hat im Allgemeinen die Figur zwei Ecken mehr, als die Differenz Einheiten, oder $M = d + 2$. Man erhält also die fünf-, sechs-, siebeneckigen Zahlen, wenn man die Differenz $= 3, 4, 5$ setzt. — Substituirt man nun diese verschiedenen Differenzen in der allgemeinen Formel (§. 220. V.)

$$S = n + \frac{n(n-1)d}{2};$$

so ergeben sich folgende spezielle Formeln:

Das IIIeck $= \frac{n(n+1)}{2}$

IVeck $= n^2$

Veck $= \frac{3n^2-n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$

VIeck $= \frac{4n^2-2n}{2} = 2n^2-n = n(2n-1)$

VIIeck $= \frac{5n^2-3n}{2} = \frac{n(5n-3)}{2}$

VIIIeck $= \frac{6n^2-4n}{2} = n(3n-2)$

IXeck $= \frac{7n^2-5n}{2} = \frac{n(7n-5)}{2}$ u. s. w.

Meck $= \frac{(M-2)n^2-(M-4)n}{2}$.

Aufgabe. Welches ist die 12eckige Zahl von 20?

Auflösung. Indem hier $M = 12$ und $n = 20$ ist, so wird

$$x = \frac{(x\not{0}^5 \times 400) - 8^4.20}{\not{2}}$$

$$= 2000 - 80 = 1920.$$

Vierter Artikel.

Von den arithmetischen Progressionen des zweiten Grades.

§. 223.

Eine Reihe von Zahlen, deren Differenzen eine arithmetische Progression des ersten Grades geben, ist eine arithmetische Progression des zweiten Grades. — In einer solchen Progression stehen zum Beispiele die Quadrate der natürlichen Zahlen:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81
3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 erste Differenzen
2, 2, 2, 2, 2, 2, 2 zweite Differenz.

Die zweite Differenz ist jene zwischen den Gliedern der ersten Differenzen, oder der arithmetischen Progression.

Die allgemeine Formel für die arithmetischen Progressionen des zweiten Grades wird, wenn man die erste der ersten Differenzen durch d, und die zweite durch δ bezeichnet, folgende seyn:

I. II. III. IV. V. VI.

$a,\ a+d,\ a+2d+\delta,\ a+3d+3\delta,\ a+4d+6\delta,\ a+5d+10\delta.$

Beweis. Die ersten Differenzen bilden eine arithmetische Progression vom ersten Grade, und sind daher:

$d,\ d+\delta,\ d+2\delta,\ d+3\delta,\ d+4\delta,\ d+5\delta.$

Es muß also a in jedem Gliede, und d in jedem folgenden einmal öfter als im vorhergehenden enthalten seyn.

Eben so einleuchtend ist es, daß in dem dritten Gliede δ vorkommen müsse; und weil, wenn man das dritte von dem vierten abzieht, der Rest $d+2\delta$ seyn muß, so muß δ im vierten Gliede dreifach vorkommen. Zieht man das vierte Glied von dem fünften ab, so muß der Rest $d+3\delta$ seyn, welches voraussetzt, daß δ in dem fünften Gliede sechsfach vorkomme u. s. w. Oder allgemein:

Es müssen die Koeffizienten von δ so zunehmen, daß, wenn man jeden vorhergehenden von dem darauf folgenden abzieht, jeder folgende Rest um 1 größer, als der vorhergehende wird. Nun sind diese Koeffizienten folgende:

$1,\ 1+2,\ 1+2+3,\ 1+2+3+4,\ 1+2+3+4+5 =$
$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15.$

§. 224.

Folgesätze.

I. Das erste Glied a kommt also in jedem folgenden Gliede und auch im letzten vor, wo man die Reihe abbricht.

II. Die Differenz d erscheint in jedem Gliede, multiplizirt mit $N-1$ (wenn dadurch die Anzahl der vorhergehenden Glieder bezeichnet wird).

III. Die zweite Differenz δ hat zum Koeffizienten eine Dreieckszahl von $N-2$ Gliedern. Jeder Koeffizient von δ kann also durch ein Dreyeck dargestellt werden; daher ist (nach §. 222. I.) der Koeffizient von δ allgemein

$$= \frac{(N-1)(N-2)}{1 \cdot 2} = \frac{N^2 - 3N + 2N^\circ}{1 \cdot 2}$$

IV. Daher ist das Glied, vor welchem $N-1$ Glieder hergehen,

$$\text{oder } Z = a + (N-1)\,d + \left(\frac{N^2 - 3N + 2N^\circ}{2}\right)\delta$$

$$Z = a + Nd - d + \tfrac{1}{2}N^2\delta - \tfrac{3}{2}N\delta + N^\circ\delta$$

$$Z = \tfrac{1}{2}\delta \times N^2 + (d - \tfrac{3}{2}\delta)N + (a + \delta - d)N^\circ.$$

Aufgabe. 1) Welches ist das zehnte Glied in der Reihe der Quadrate der natürlichen Zahlen von 1 angefangen?

Auflösung. Hier ist $a = 1$, $N = 10$, $d = 3$, $\delta = 2$.

$$Z = 1 + 9.3 + \tfrac{72}{2}.2 = 28 + 72 = 100.$$

Aufgabe. 2) Welches ist das hundertste Glied in der Reihe:

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28 u. s. w.

Auflösung. Hier ist $d = 2$, $\delta = 1$, $N = 100$;

folglich $Z = 1 + (99.2) + (\frac{9702}{1}) = 5050$.

Abstrahirt man von der Gleichung des ersten Grades, welche, aus N Glieder bestehend, mit jener des zweiten Grades in Verbindung gesetzt worden ist, und nimmt man eine selbstständige Reihe von Triagonalzahlen, welche n Glieder hat, so ist das n^{te} Glied, mit welchem man die Reihe abbricht, oder $Z = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$ (nach Nro. IV.).

§. 225.

§. 225.

Aufgabe. Die Summe einer arithmetischen Progression des zweiten Grades zu finden.

Auflösung.

I. Setzt man die Summe einer arithmetischen Progression des zweiten Grades $= \mathfrak{S}$, und die Summe der Progression des ersten Grades $= S$; so geht aus der Formel §. 223. die Gleichung hervor: $\mathfrak{S} = S + (N-2)\,\Delta \times \delta$,

wo $(N-2)\,\Delta$ die Summe der dreieckigen Zahlen 1, 3, 6, 10 u. s. w. vorstellt, oder $= \Sigma$ ist.

Die Richtigkeit dieser Annahme ergibt sich klar aus der Zergliederung der allgemeinen Formel für arithmetische Progressionen des zweiten Grades. (§. cit.)

II. Nach §. 218. ist $S = (a + z)\frac{N}{2}$, worin a das erste, z das letzte Glied, N die Gliederzahl der arithmetischen Progression des ersten Grades bedeutet. Aber $z = a + d\,(N-1)$.

Substituirt man diesen Werth für z, so wird

$$S = [a + a + d\,(N-1)]\,\frac{N}{2}$$

$$S = [2a + d\,(N-1)]\,\frac{N}{2} = \frac{2aN + dN^2 - dN}{2}.$$

III. Jetzt muß noch der Werth von $(N-2)\,\Delta \times \delta = \Sigma$, d. i. die Summe der Dreieckszahlen als der Koeffizienten von δ gefunden, und zur Summe S addirt werden.

1) Man schreibe eine Reihe solcher Dreieckszahlen an (§. 222. I.), suche nach und nach die Summen aus den ersten zwei, drei, vier Gliedern u. s. w., und bemerke das Gesetz, welches der Entstehung der Summen zum Grunde liegt.

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45 u. s. w.

$= \frac{1.2}{1.2}, \frac{2.3}{1.2}, \frac{3.4}{1.2}, \frac{4.5}{1.2}, \frac{5.6}{1.2}, \frac{6.7}{1.2}, \frac{7.8}{1.2}, \frac{8.9}{1.2}, \frac{9.10}{1.2}$ u. s. w.

Zusatz. Diese Dreyeckszahlen entstehen aus der Formel $\frac{n(n+1)}{1.2}$, wenn man n nach und nach 1, 2, 3, 4, 5 u. s. w. gelten läßt.

2) Addirt man diese Dreiecksзahlen, und bezeichnet die Summe von 1, 2, 3 . . . . . n Gliedern mit $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3 \ldots\ldots \Sigma_n$, so ergeben sich die Summen:

$$\Sigma_1 = 1 = \frac{1.2}{1.2} \times \frac{3}{3}$$
$$\Sigma_2 = 1 + 3 = 4 = \frac{2.3}{1.2} \times \frac{4}{3}$$
$$\Sigma_3 = 4 + 6 = 10 = \frac{3.4}{1.2} \times \frac{5}{3}$$
$$\Sigma_4 = 10 + 10 = 20 = \frac{4.5}{1.2} \times \frac{6}{3}$$
$$\Sigma_5 = 20 + 15 = 35 = \frac{5.6}{1.2} \times \frac{7}{3}$$
$$\vdots$$
$$\Sigma_n = \frac{n(n+1)}{1.2} \times \frac{n+2}{3}$$

3) Aufgabe. In einem Zeughause sind Kugeln nach einer dreiseitigen Pyramide, und zwar so aufgeschichtet, daß die Anzahl der Kugeln in den verschiedenen Schichten, von der obersten zur untersten gerechnet, durch die Dreiecksзahlen 1, 3, 6, 10, 15 u. s. w. angegeben wird. — Wie viele Kugeln befinden sich

a) in der untersten Schichte,
b) in der ganzen Pyramide,

wenn es in allem 30 Schichten sind? —

Antwort. a) $z = \frac{n(n+1)}{1.2} = \frac{30.31}{1.2} = 465$ Kugeln.

b) $\Sigma = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3} = \frac{30.31.32}{1.2.3} = 4960$ Kugeln.

IV. Nun modifizirt man die Formel $\frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3}$ so, daß sie für die Progression des zweiten Grades passe, worin $n = N - 2$ ist, d. h. worin die Progression des ersten Grades aus N, die Reihe der dreieckigen Koeffizienten von δ aber nur aus $N - 2$ Gliedern besteht. —

Also $\Sigma = \left[\frac{(N-2).(N-1).N}{1.\ 2.\ 3}\right]\delta = \frac{(N^3 - 3N^2 + 2N)}{1.\ 2.\ 3}\delta.$

Da aber $S = S + \Sigma$; so addirt man zum obigen Werthe von S noch den Werth von Σ.

$$\mathfrak{S} = \frac{2aN + dN^2 - dN}{2} + \frac{N^3\delta - 3N^2\delta + 2N\delta}{1.\ 2.\ 3}.$$

$$\mathfrak{S} = \frac{6aN + 3dN^2 - 3dN + N^3\delta - 3N^2\delta + 2N\delta}{1.\ 2.\ 3.}.$$

$$\mathfrak{S} = \frac{N^3.\delta + 3N^2(d-\delta) + N(6a - 3d + 2\delta)}{1.\ 2.\ 2}.$$

$$\mathfrak{S} = N^3\left(\frac{\delta}{6}\right) + N^2\left(\frac{d-\delta}{2}\right) + N\,\frac{(6a - 3d + 2\delta)}{6}.$$

§. 226.

Aufgaben.

I. Die Summe von den Quadraten aller natürlichen Zahlen von 1 bis 100 zu finden.

Auflösung. Hier ist $a = 1$, $d = 3$, $\delta = 2$, $N = 100$.

Also: $s = 1000000 \times \frac{1}{3} + \frac{10000}{2} + \frac{50}{3}$.

$s = 338.350.$

II. In einem Arsenale befindet sich eine Anzahl Kugeln, in Form einer abgekürzten dreieckigen Pyramide geschichtet. In der obersten Schichte liegen 28, in der zweiten 36, in der dritten 45. — Welches ist die Summe dieser Kugeln, da es in Allem 20 Schichten sind?

Auflösung. 28. 36. 45.

8. 9.

1.

Also $a = 28.$
$d = 8.$
$\delta = 1.$
$N = 20.$

$s = (8000 \times \frac{1}{6}) + (400 \times \frac{7}{2}) + (20 \times \frac{146}{6})$

$s = 1820 + 1400 = 3220$ Kugeln.

Fünfter Artikel.

Von den arithmetischen Reihen überhaupt.

§. 227.

I. Bezeichnet man das erste, zweite, dritte ... n^{te} Glied einer arithmetischen Reihe mit $u_1, u_2, u_3 \ldots u_n$, und die Summe von 1, 2, 3 ... n Gliedern mit $S_1, S_2, S_3 \ldots S_n$; so ist

1) für eine Reihe des ersten Grades:

$$u_n = a + d(n-1) = dn + (u_1 - d)n^\circ$$

$$S_n = (a + u_n)\frac{n}{2} = \tfrac{1}{2}dn^2 + \left(\frac{2u_1 - d}{2}\right)n;$$

2) für eine Reihe des zweiten Grades:

$$u_n = \tfrac{1}{2}\delta n^2 + (d - \tfrac{3}{2}\delta)n + (\alpha + \delta - d)n^\circ$$

$$S_n = \frac{\delta}{6}n^3 + \left(\frac{d-\delta}{2}\right)n^2 + \left(\frac{6a - 3d + 2\delta}{6}\right)n.$$

II. In diesen Formeln ist für eine gegebene Reihe u_n und S_n nur von n abhängig, d. i. nur wie sich in einer bestimmten Reihe n ändert, ändert sich auch u_n und S_n.

Bezeichnet man die Koeffizienten von n in u_n mit den vorerst unbestimmten Größen: p, q, r, s..... in S_n mit a, b, c, d....., so können jene Formeln für die Reihen des ersten Grades auch so dargestellt werden:

$$u_n = pn + qn^\circ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha$$

$$S_n = an^2 + bn \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\beta$$

für die Reihen des zweiten Grades:

$$u_n = pn^2 + qn + rn^\circ \quad \ldots\ldots (\gamma$$

$$S_n = an^3 + bn^2 + cn \quad \ldots\ldots (\delta$$

Die noch unbestimmten Koeffizienten von den Potenzen von n werden für eine gegebene Reihe bestimmt, wenn man in jenen Gleichungen n nach und nach = 1, 2, 3.... setzt. So erhält man

aus α) die Gleichungen

$$u_1 = p + q \text{ und } u_2 = 2p + q$$

aus β) $S_1 = a + b$ und $S_2 = 4a + 2b$

aus γ)
$$\begin{cases} u_1 = p + q + r \\ u_2 = 4p + 2q + r \\ u_3 = 9p + 3q + r \end{cases}$$

aus δ)
$$\begin{cases} S_1 = a + b + c \\ S_2 = 8a + 4b + 2c \\ S_3 = 27a + 9b + 3c. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich nun immer p, q, r ... und a, b, c bestimmen. Z. B. Für die Reihe: 1, 4, 9, 16 .... (Aufg. I. v. §. 226)

ist $p+q+r=1$	$a+b+c=1$
$4p+2q+r=4$	$8a+4b+2c=1+4=5$
$9p+3q+r=9$	$27a+9b+3c=1+4+9=14.$
woraus $p=1, q=0, r=0,$	woraus $a=\frac{1}{3}, b=\frac{1}{2}, c=\frac{1}{6}$
also $u_n=n^2$	$S_n=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$
$u_{100}=100^2=10000$	$S_{100}=\frac{1000000}{3}+\frac{10000}{2}+\frac{100}{6}=338350.$

§. 228.

In gleicher Art ist für Reihen des dritten Grades:

$$u_n = pn^3 + qn^2 + rn + sn^0 \quad \ldots\ldots (\alpha$$
$$S_n = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn \quad \ldots\ldots (\beta.$$

Setzt man n nach und nach $= 1, 2, 3, 4,$ so werden p, q, r, s durch die vier Gleichungen bestimmt:

$$u_1 = p + q + r + s$$
$$u_2 = 8p + 4q + 2r + s$$
$$u_3 = 27p + 9q + 3r + s$$
$$u_4 = 64p + 16q + 4r + s;$$

von S_n: a, b, c, d durch die vier Gleichungen:

$$S_1 = a + b + c + d$$
$$S_2 = 16a + 8b + 4c + 2d$$
$$S_3 = 81a + 27b + 9c + 3d$$
$$S_4 = 256a + 64b + 16c + 4d.$$

Daß die Gleichungen α und β wirklich zu Reihen des dritten Grades gehören, kann in folgender Art gezeigt werden. Man setzt in β) $n-1$ statt n, entwickelt die Glieder einzeln nach den Potenzen, und zieht dann die für S_{n-1} erhaltene Reihe von der für S_n ab; so gibt die Differenz nothwendig das n^{te} Glied

$$S_n - S_{n-1} = u_n = 4an^3 - (6a-3b)n^2$$
$$+ (4a-3b+2c)n - (a-b+c-d) \quad \ldots\ldots (\gamma$$

hat offenbar die Form von u_n in α. Sucht man aus γ das u_1, u_2, u_3, u_4 und dafür die ersten, zweiten und dritten Dif-

ferenzen, in gleicher Art auch für u_5, u_6, u_7, u_8; so werden sich diese dritten Differenzen gleichen, wie dieß bei Reihen des dritten Grades nothwendig ist.

Allgemein ist für eine Reihe des m^{ten} Grades:

$$u_n = pn^m + qn^{m-1} + rn^{m-2} + \ldots\ldots xn + y$$
$$S_n = an^{m+1} + bn^m + cn^{m-1} + \ldots\ldots gn^2 + hn.$$

Aus diesen Formeln geht hervor, daß für Reihen des m^{ten} Grades $m+1$ Glieder gegeben seyn müssen, damit die in jeder Formel vorkommenden $m+1$ unbestimmten Koeffizienten durch gleich viele Gleichungen bestimmt werden können.

Nach dem oben angegebenen Verfahren kann überhaupt für jede Reihe, deren Summenformel gegeben ist, aus dieser das allgemeine Glied abgeleitet werden, wenn man in der Summenformel $n-1$ statt n setzt, und S_{n-1} von S_n subtrahirt, indem die Summe von den n Gliedern offenbar um das n^{te} Glied größer seyn muß, als die von den ersten $n-1$ Gliedern.

II. Hauptstück.

Von den geometrischen Proportionen und Progressionen.

Erster Artikel.

Von den geometrischen Verhältnissen.

---

§. 229.

Die Größe, Gleichheit oder Ungleichheit geometrischer Verhältnisse wird durch ihre Exponenten bestimmt, welche man bekanntlich erhält, wenn man das Konsequens durch das Antezedens dividirt. — Also bleibt der Werth eines geometrischen Verhältnisses so lange unverändert, als sein Exponent der nämliche ist.

Erklärungen.

1) Das geometrische Verhältniß heißt **rational** oder **irrational**, je nachdem der Exponent q eine Rational- oder Irrationalzahl ist.

2) Da in einem geometrischen Verhältnisse die Größen durch Division verglichen werden, so gelten hier alle Regeln, welche für die Division ganzer und gebrochener Zahlen bisher gegeben wurden.

3) Die in einem rationalen geometrischen Verhältnisse stehenden Größen heißen kommensurabel, weil sich die eine Größe b durch die andere a, oder durch einen aliquoten Theil derselben messen läßt. Aus dem entgegengesetzten Grunde heißen die Größen eines irrationalen Verhältnisses inkommensurabel; doch kann man jedes irrationale Verhältniß durch Approximation auf ein rationales, und die beiden inkommensurablen Größen auf kommensurable reduziren.

§. 230.

Gesetze der geometrischen Verhältnisse.

I. Das geometrische Verhältniß zweier Zahlen bleibt unverändert, wenn man mit der nämlichen Zahl beide Glieder entweder multiplizirt, oder dividirt.

$$a : b = ax : bx$$

$$a : b = \frac{a}{x} : \frac{b}{x}.$$

Denn ist $\frac{b}{a} = q$; so ist auch $\frac{bx}{ax} = q\frac{x}{x} = q$.

Also läßt sich jedes gegebene Verhältniß, dessen Glieder Primzahlen sind, in unendlich vielen größern Formen ausdrücken, und ein Verhältniß aus Fraktionen in ein anderes gleiches von ganzen Zahlen verwandeln, wenn man das Antezedens und das Konsequens im ersten Falle durch eine beliebige Zahl, im zweiten durch das Produkt der Nenner multiplizirt.

$$2 : 3 = 4 : 6 = 6 : 9 = 8 : 12 = 2m : 3m.$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = ad : bc.$$

Im Gegentheile kann man ein geometrisches Verhältniß, dessen Glieder gleichartige Produkte sind, auf die kleinste Form zurückbringen, wenn man sie durch den größten gemeinschaftlichen Theiler dividirt.

$$12 : 18 = 2 : 3$$
$$52 : 39 = 4 : 3$$
$$am : bm = a : b.$$

Anmerkung. Das bisher Gesagte hat auch statt, wenn mehr als zwei Verhältnißzahlen gegeben sind: nur muß die Veränderung mit jedem Gliede vorgenommen werden; also:

$\alpha)$ $5 : 10 : 15 : 20 : 30 = 1 : 2 : 3 : 4 : 6.$

$\beta)$ $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{4} : \frac{4}{5} = \frac{30 : 40 : 45 : 48}{60} = 30 : 40 : 45 : 48.$

$\gamma)$ $am : am^2b : a^2cm^3 = 1 : bm : acm^2.$

Dieß geht daraus hervor, daß z. B. $am : am^2b : a^2cm^3$ nur ein verkürzter Ausdruck für die zugleich gegebenen Verhältnisse $am : am^2b$, $am : a^2cm^3$ und $am^2b : a^2cm^3$ ist.

II. Sind die Verzähltnißzahlen ungleich benannte Größen, so macht man sie gleichartig; und dann ist das Verhältniß solcher gleichartigen, durch einerlei Maß bestimmten, Größen dem Verhältnisse der Zahlen gleich, welche ihnen als Koeffizienten voranstehen.

Also: 3 kr. : 1 fl. = 3 kr. : 60 kr. = 3 : 60 = 1 : 20.

1 Speziesthl. : 1 Kronthl. = 144 kr. : 162 kr. = 144 : 162
$= 72 : 81 = 8 : 9;$
also 9 Speziesthl. = 8 Kronthl.

III. Irrationalzahlen von einerlei Wurzel und Größe stehen in einem rationalen Verhältnisse.

$$5\sqrt{3} : 20\sqrt{3} = 5 : 20 = 1 : 4.$$

IV. Alle geometrischen Verhältnisse lassen sich auf das Verhältniß bloßer Zahlen, und diese wieder auf Verhältnisse ganzer Zahlen reduziren.

Also z. B. $\sqrt{2} : \sqrt[3]{3} = 1{,}4142136 : 1{,}4422496$
$= 14142136 : 14422496.$

Anmerkung. 1) Was hier von den geometrischen Verhältnissen gesagt wurde, ist auf die geometrischen Proportionen selbst anwendbar.

2) Von den zusammengesetzten Verhältnissen wird §. 234. die Rede seyn.

Zweiter Artikel.

Von den geometrischen Proportionen.

§. 231.

Da der allgemeine Ausdruck jeder geometrischen Proportion $a : b = aq : bq$ ist, so ergibt sich zuvörderst der wichtige Satz: In jeder (diskreten) geometrischen Proportion ist das Produkt der äußern Glieder dem Produkte der mittlern gleich:

$$a \times bq = b \times aq.$$

Dieses ist der Probirstein aller ächten geometrischen Proportionen, und das Grundgesetz, aus dem sich die übrigen Gesetze natürlich ableiten.

Folgesätze: I. Um nun zu was immer für einer diskreten geometrischen Proportion aus drei gegebenen Zahlen die vierte Proportionalzahl (x) zu finden, darf man nur das Produkt der äußern dem Produkte der mittlern Glieder gleich setzen, und die bekannten Größen von x durch Division hinwegschaffen.

a) $5 : 11 = 25 : x$

$$5x = 11 \cdot 25$$

$$x = \frac{11 \cdot 25}{5} = 55.$$

b) $5 : 11 = x : 55$

$$11x = 55 : 5$$

$$x = \frac{55 \cdot 5}{11} = 25.$$

II. Wenn das Produkt zweier Zahlen (z. B. 5, 6) dem Produkte zweier andern (z. B. 3, 10) gleich ist; so geben diese Zahlen eine diskrete geometrische Proportion, wenn man die Faktoren des einen Produkts zu den äußern, die des andern zu den innern Gliedern macht.

$$3 : 5 = 6 : 10.$$

Wenn $ad = bc$, so ist $a : b = c : d$,
wenn $ab - ad = c$ oder $a(b - d) = 1 . c$, so ist
$a : 1 = c : b - d$.

§. 232.

Satz. Die allgemeine Form der stetigen geometrischen Proportion ist: $a : aq : aq^2$.

Beweis. Man verwandle die stetige Proportion in eine diskrete, worin das letzte Glied unbekannt ($=x$) ist, und bestimme dieses nach §. praec.

$$a : aq = aq : x$$
$$a \cdot x = a^2q^2$$
$$x = \frac{a^2q^2}{a} = aq^2.$$

Also: $a : aq = aq : x = a : aq = aq : aq^2$
oder $a : aq : aq^2$ (§. 208).

Folgesätze. I. In der geometrischen stetigen Proportion ist das Produkt der äußern Glieder dem Quadrate des mittlern gleich.

$$a : aq : aq^2$$
$$a \times aq^2 = (aq)^2$$
$$a^2q^2 = a^2q^2.$$

Daraus erklärt sich nun von selbst, wie man zu zwei gegebenen Zahlen die dritte Proportionalzahl finden könne.

Z. B. 1) $3 : 9 : x$
$3x = 9^2 = 81$
$x = \frac{81}{3} = 27.$

2) $3 : x : 27$
$x^2 = 81$
$x = 9.$

3) $x : 9 : 27$
$x = \frac{81}{27} = 3.$

II. Wenn das Produkt zweier Zahlen eine Quadratzahl gibt, so ist die Wurzel von dieser die mittlere Proportionalzahl zwischen beiden ersten.

Z. B. $4 \times 9 = 36 = 6^2$

Also: $4 : 6 : 9.$

Wenn $ax^2 - x = c^2$, so ist $ax - 1 : c : x.$

§. 233.

Abgeleitete Gesetze der geometrischen Proportion.

I. In jeder Proportion lassen sich die vier Glieder achtmal versetzen: 1) durch Verwechslung der mittlern und äußern Glieder (permutando); 2) durch Umkehrung der Verhältnisse (invertendo).

$$\left.\begin{array}{l} a : b = aq : bq \\ a : aq = b : bq \\ bq : aq = b : a \\ bq : b = aq : a \end{array}\right\} \text{permutando.}$$

$$b : a = bq : aq \text{ invertendo.}$$

$$\left.\begin{array}{l} b : bq = a : aq \\ aq : bq = a : b \\ aq : a = bq : b \end{array}\right\} \text{permutando.}$$

Beweis. In allen diesen Formen ist das Produkt der äußern Glieder dem Produkte der mittlern gleich; $abq = abq$.

II. In jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz der Vorderglieder zur Summe oder Differenz der Hinterglieder, wie jedes Vorderglied zu seinem Hintergliede.

$$a : b = aq : bq$$

$$a \pm aq : b \pm bq = a : b = aq : bq.$$

Denn $(a \pm aq)b = (b \pm bq)a$. Oder permutando, et componendo vel differentiando

$$(a \pm b) : (aq \pm bq) = b : bq = a : aq$$

d. i. die Summe oder Differenz der beiden ersten Glieder verhält sich zur Summe oder Differenz der beiden letzten Glieder, wie sich ein paar homologe Glieder verhalten.

III. Wenn man in einer Proportion ein oder beide Verhältnisse, oder jedes Paar homologer Glieder, oder überhaupt ein äußeres und ein inneres Glied, durch die nämliche Zahl multiplizirt oder dividirt, so stehen die Produkte oder die Quotienten noch in einer Proportion zu einander.

Wenn $a : b = aq : bq$, so ist:

1) $am : bm = aq : bq$.

2) $am : bm = amq : bmq$.

3) $am : b = amq : bq$.

4) $\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{aq}{m} : \frac{bq}{n}$.

Beweis. In allen diesen Proportionen ist α) der Exponent beider Verhältnisse der nämliche, und β) das Produkt der äußern Glieder dem der mittlern gleich.

IV. Eine Proportion, worin ein Glied, oder einige, oder alle Glieder aus gebrochenen Zahlen bestehen, läßt sich ihres Werthes unbeschadet in eine andere von ganzen Zahlen umschaffen, wenn man die Nenner der mittlern Glieder als Faktoren zu den äußern, und die Nenner der äußern Glieder als Faktoren zu den mittlern setzt. Ueberhaupt betrachte man die innern Glieder als Dividend, die äußern als Divisor, und wende alle Vortheile in der Operation an, welche sich bei der Division ganzer und gebrochener Zahlen anwenden lassen.

$$\frac{a}{x} : \frac{b}{y} = \frac{c}{u} : \frac{d}{z}$$

$$ay : bx = cz : du; \text{ (§. 230. I.)}$$

oder $au : bz = cx : dy$; in beiden Fällen ist

$$aduy = cbxz.$$

V. Die Proportion bleibt, wenn man alle Glieder derselben zu gleichen Würden erhebt, oder daraus gleiche Wurzeln zieht.

Z. B. $a : b = aq : bq$.

Also $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{aq} : \sqrt{bq}$.

$$a^m : b^m = (aq)^m : (bq)^m.$$

Und wenn $a : b = \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d}$, so ergibt sich

$$a^m : b^m = c : d.$$

Beweis. 1) Wenn $a : b = aq : bq$,

so ist: $abq = abq$;

also auch $\sqrt{abq} = \sqrt{abq}$;

oder: $\sqrt{a} \times \sqrt{bq} = \sqrt{b} \times \sqrt{aq}$; (also nach §. 231. II.)

$$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{aq} : \sqrt{bq}.$$

2) Wenn $a : b = \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d}$,

so ist auch $a . \sqrt[m]{d} = b . \sqrt[m]{c}$; folglich zu m potenzirt

$$a^m \sqrt[m]{d^m} = b^m \sqrt[m]{c^m}$$

$$a^m . d = b^m . c$$

$$a^m : b^m = c : d.$$

§. 234.

Wenn man die homologen Glieder zweier oder mehrerer Proportionen durch einander multiplizirt oder dividirt, so bleiben auch die Produkte proportional.

$$\begin{array}{r} a : b = aq : bq \\ c : d = cm : dm \\ \hline ac : bd = acmq : bdmq. \end{array}$$

oder $\frac{a}{c} : \frac{b}{d} = \frac{aq}{cm} : \frac{bq}{dm}$.

$$\begin{array}{r} 2 : 3 = 6 : 9 \\ 5 : 6 = 10 : 12 \\ \hline 10 : 18 = 60 : 108 \text{ u. f. w.} \end{array}$$

oder $\frac{2}{5} : \frac{3}{6} = \frac{6}{10} : \frac{9}{12}$.

$$\begin{array}{rr} \text{Ferner:} & a : b = aq : bq \\ & c : d = cm : dm \\ & g : h = gn : hn \\ \hline & acg : bdh = acgmnq : bdhmnq. \end{array}$$

Hieraus fließen denn wieder folgende Gesetze:

I. Wenn in zwei Proportionen zwei gemeinschaftliche Glieder vorkommen, so sind die übrigen ebenfalls proportional.

1) Wenn die beiden gemeinschaftlichen Glieder das erste oder zweite Verhältniß ausmachen:

α) $a : b = c : d$

$\underline{a : b = g : h,}$ so ist ex aequo simpliciter

$c : d = g : h.$

β) m : n = o : p
x : y = o : p
m : n = x : y.

Denn zwei Verhältnisse, von denen jedes dem nämlichen dritten gleich ist, sind auch unter sich gleich.

2) Wenn die gemeinschaftlichen Glieder homolog sind:

α) a : b = c : d
g : a = h : c
ag : ab = hc : cd; und nach §. 233. III.
g : b = h : d, d. i. ordinatim et ex aequo.

β) a : b = c : d
b : g = d : h
ab : bg = cd : dh
a : g = c : h aus dem nämlichen Grunde.

3) Wenn die gemeinschaftlichen Glieder die äußern oder mittlern sind:

α) a : b = c : d
g : a = d : h; so wird perturbate et ex aequo
g : b = c : h.

β) a : b = c : d
b : g = h : c
a : g = h : d.

II. Wenn in zwei Proportionen zwei homologe Glieder (oder überhaupt ein inneres der ersten, und ein äußeres Glied der zweiten Proportion, oder umgekehrt) gleich sind, so stehen das Antezedens und Konsequens derselben in dem Verhältnisse, in welchem die Produkte der übrigen zwei Verhältnisse stehen; man kann also aus den beiden Proportionen eine neue bilden, aus welcher das gemeinschaftliche Glied eliminirt ist.

Z. B. C : c = E : V
T : t = V : e
CT : ct = E : e
oder auch A : a = B : C
a : d = F : G
A : d = BF : CG.

Zusatz. Dieses führt uns auf die Lehre von den zusammengesetzten Verhältnissen. Man heißt aber ein zusammengesetztes Verhältniß (z. B. E : e §. eod.) dasjenige, welches durch die Multiplikation zweier oder mehrerer anderer entstanden ist. Eine Proportion, welche aus solchen zusammengesetzten Verhältnissen besteht, heißt dann eine zusammengesetzte Proportion. — Man habe z. B. die Proportion:

$$\begin{array}{rcl} a : b & = & c : d \\ f : g & = & d : h \\ l : m & = & h : n \\ o : p & = & n : q \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} afo : bgmp & = & cdhn : dhnq. \\ & = & c : q. \end{array}$$

Das heißt: wenn mehrere Verhältnisse von der Art sind, daß immer das Hinterglied in einem Verhältnisse das Vorderglied im folgenden wird, so ist das Verhältniß des ersten Gliedes zum letzten aus allen diesen zusammengesetzt.

Man pflegt solche zusammengesetzte Proportionen manchmal auch so auszudrücken:

$$(C : c) + (T : t) = E : e.$$
$$(a : b) + (f : g) + (l : m) + (o : p) = c : q.$$

Wo dann das Zeichen + keine Addition, sondern eine Zusammensetzung der Verhältnisse anzeigt, d. i. daß die homologen Glieder durch einander zu multipliziren seyen.

Beispiele. I. Zwei Flächen A und B verhalten sich wie die Produkte aus ihren Längen und Breiten.

Es habe A zur Länge 300, zur Breite 240 Fuß,
B " " " 250 " " " 180 " ;

so ist das Verhältniß von

$$\begin{array}{rcl} A : B & = & 300 \times 240 : 250 \times 180 \\ & = & (300 : 250) + (240 : 180) \\ & = & 6 \times 24 : 5 \times 18 \\ & = & 1 \times 24 : 5 \times 3 \\ & = & 1 \times 8 : 5 \times 1 = 8 : 5. \end{array}$$

II. Der Kubikinhalt zweier Größen, z. B. zweier Zimmer C, D, verhalten sich gegen einander wie die Produkte aus Länge, Breite, Höhe.

C sey 16 Fuß hoch, 28 lang, 20 breit,
D = 18 = = 25 = 21 = ; so ergibt sich

$$C : D = 16.28.20 : 18.25.21$$
$$= (16 : 18) + (28 : 25) + (20 : 21)$$
$$= 128 : 135.$$

§. 235.

Aus den zusammengesetzten Verhältnissen gehen noch insbesondere die vervielfältigten hervor; wenn nämlich in drei gleichen Verhältnissen das Konsequens des ersten das Antecedens im zweiten, und das Konsequens des zweiten Verhältnisses das Antecedens des dritten ist, d. h.

wenn: $a : b = x : y$
$b : c = x : y$; so ergibt sich

I. $a : c = x^2 : y^2$.

Man nennt ein aus zwei gleichen Verhältnissen zusammengesetztes ein duplizirtes oder quadratisches.

II. $a : c = x^2 : y^2$
$\sqrt{a} : \sqrt{c} = x : y$.

Dieses Verhältniß $x : y$ heißt in Ansehung des duplizirten $a : c$ ein subduplizirtes.

III. Wenn $a : b = x : y$
$b : c = x : y$
$c : d = x : y$

so ist $a : d = x^3 : y^3$,

d. i. a steht zu d in einem triplizirten oder kubischen Verhältnisse.

IV. $\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{d} = x : y$.

Das Verhältniß x zu y ist in Ansehung des triplizirten $a : d$ ein subtriplizirtes.

V. Wenn mehrere gleiche stetige Verhältnisse gegeben sind z. B. $a : b = b : c = c : d = d : e \ldots$ oder $a : b : c : d : e$;

so

so steht das erste Glied zum dritten im duplizirten, zum vierten im triplizirten Verhältnisse des ersten Gliedes zum zweiten ꝛc.; allgemein verhält sich das erste Glied zum n^{ten}, wie $a^{n-1} : b^{n-1}$. Dieß ergibt sich aus folgender Zusammenstellung der Glieder:

$a : b = a : b$	Daraus ist	$a : c = a^2 : b^2$
$b : c = a : b$		$a : d = a^3 : b^3$
$c : d = a : b$		$a : e = a^4 : b^4$
$d : e = a : b$		$a : N = a^{n-1} : b^{n-1}$.

§. 236.

Aufgaben über Proportionen, worin einfache Verhältnisse vorkommen.

1) Man suche zwei Zahlen, deren Differenz, Summe und Produkt sich gegen einander verhalten wie $2 : 3 : 5$.

Auflösung. Die beiden Zahlen seyen x, y.

$$x-y : x+y = 2 : 3 \quad | \quad 3x-3y = 2x+2y$$
$$x+y : xy = 3 : 5 \quad | \quad x = 5y$$
$$5x+5y = 3xy.$$

Substituirt: $25y + 5y = 15yy$

$$15y : \quad 30y = 15yy$$
$$2 = y.$$

Also $x = 10$.

Folglich sind die verlangten Zahlen 2, 10.

Denn
$$\left.\begin{array}{c} x-y : x+y : xy \\ 10-2 : 10+2 : 2\times 10 \\ 8 : 12 : 20 \end{array}\right\} = 2 : 3 : 5.$$

2) Als der jährliche Lohn eines Bedienten waren festgesetzt 40 fl. und eine Taschenuhr. Der Bediente blieb aber nur $\frac{1}{4}$ Jahr im Dienste, und erhielt zufolge des Akkordes die Uhr; nur mußte er 5 fl. an seinen Herrn zurückzahlen, weil er noch nicht den ganzen Werth der Uhr abgedient hatte. Welches war der Werth dieser Uhr?

Auflösung. $4 : 1 = 40 + x : x - 5$

$$4x - 20 = 40 + x$$
$$3x = 60$$
$$x = 20.$$

Also galt die Uhr vertragsmäßig 20 fl.

3) Aus einer Anzahl Strähnen Garns erhielt eine Frau das erste Mal 30 Ellen Leinwand, von Ellenbreite. Das zweite Mal erhielt sie, von 10 Strähnen mehr, nur $28\frac{4}{5}$ Ellen, aber von $\frac{5}{4}$ Ellenbreite. Wie viele Strähnen waren es beide Male gewesen?

Auflösung. Das erste Mal x Strähnen, das zweite Mal $x + 10$.

$$x : x + 10 = 30 \times 1 : 28\tfrac{4}{5} \times \tfrac{5}{4}$$
$$x : x + 10 = 30 : 36$$
$$36x = 30x + 300$$
$$6x = 300$$
$$x = 50.$$

Also das erste Mal waren es 30, das zweite Mal 60 Strähnen.

4°) In einer geometrischen Proportion ist die Summe der mittlern Glieder $= a$, die Summe der beiden äußern $= b$, und die Summe der Quadrate aller 4 Glieder $= c$. Welches ist diese Proportion?

Auflösung. Das Produkt der beiden mittlern, also auch der beiden äußern, ist $= \frac{a^2 + b^2 - c}{4}$; daher die gesuchte Proportion:

$$\tfrac{1}{2}[b - \sqrt{(c - a^2)}] : \tfrac{1}{2}[a - \sqrt{(c - b^2)}] =$$
$$\tfrac{1}{2}[a + \sqrt{(c - b^2)}] : \tfrac{1}{2}[b + \sqrt{(c - a^2)}].$$

Es sey $a = 31$, $b = 49$, $c = 2482$; so erhält man

$$\tfrac{1}{2}[49 - \sqrt{1521}] : \tfrac{1}{2}[31 - \sqrt{81}] = \tfrac{1}{2}[31 + \sqrt{81}] : \tfrac{1}{2}[49 + \sqrt{1521}]$$
$$\tfrac{1}{2}[49 - 39] : \tfrac{1}{2}[31 - 9] = \tfrac{1}{2}[31 + 9] : \tfrac{1}{2}[49 + 39]$$
$$\frac{10}{2} : \frac{22}{2} = \frac{40}{2} : \frac{88}{2}$$
$$1 : 11 = 20 : 44.$$

Probe.

$$11 + 20 = 31 = a.$$
$$5 + 44 = 49 = b.$$
$$5^2 + 11^2 + 20^2 + 44^2 = 25 + 121 + 400 + 1936 = 2482.$$

5°) In einer geometrischen Proportion ist die Differenz der beiden mittlern Glieder $= d$, die Differenz der beiden äußern

$= D$, und die Summe der Quadrate aller 4 Glieder $= S$. Welche Proportion ist diese?

Auflösung. Das Produkt der beiden äußern oder mittlern Glieder ist $\frac{S - d^2 - D^2}{4}$, also die Proportion selbst:

$$\tfrac{1}{2}[-D + \sqrt{(S - d^2)}] : \tfrac{1}{2}[-d + \sqrt{(S - D^2)}] =$$
$$\tfrac{1}{2}[+d + \sqrt{(S - D^2)}] : \tfrac{1}{2}[+D + \sqrt{(S - d^2)}].$$

* Es sey $d = 7$, $D = 16$, $S = 1345$.

Wie heißen die Proportionsglieder der Proportion?

Das Uebrige zur Uebung!

Anmerkung. Man könnte fragen, wie denn das Produkt der innern oder äußern Glieder in Nro. 4

$= \frac{a^2 + b^2 - c}{4}$ gefunden worden sey.

Dieses läßt sich auf folgende Art leicht erklären.

Man denke sich die Proportion:

$$v : x = y : z.$$

$x + y = a \mid v + z = b \mid v^2 + x^2 + y^2 + z^2 = c$ nach der Angabe.

In der Proportion ist $vz = xy$.

$$\begin{array}{rl} a^2 = & x^2 + 2xy + y^2 \\ + b^2 = & v^2 + 2vz + z^2 \\ \underline{\quad c = \quad} & \underline{v^2 \pm x^2 \pm y^2 \pm z^2} \\ a^2 + b^2 - c = & 2xy + 2vx. \end{array}$$

Aber $xy = vz$;

also: $a^2 + b^2 - c = 4xy$, das vierfache Produkt der äußern oder innern Glieder;

folglich $\frac{a^2 + b^2 - c}{4} = xy$, das einfache Produkt.

Anmerkung 2. Die Größe $\frac{a^2 + b^2 - c}{4}$ läßt sich als ein Produkt aus der Summe und Differenz zweier Faktoren

$$\frac{a + \sqrt{c - b^2}}{2} \text{ und } \frac{a - \sqrt{c - b^2}}{2}$$

oder $\frac{b + \sqrt{c - a^2}}{2}$ und $\frac{b - \sqrt{c - a^2}}{2}$ betrachten.

(Vergl. §. 100. III.)

§. 237.

Aufgaben über Proportionen, worin vervielfältigte Verhältnisse vorkommen.

I. Kreisflächen verhalten sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser (oder auch Halbmesser):

$$C : c = D^2 : d^2.$$

Wenn nun ein Kirchenrundel, dessen Durchmesser 40 Fuß ist, ungefähr 830 Menschen faßt; welches ist die Kapazität eines andern Rundels, das 100 Fuß im Durchmesser hat?

Auflösung. $40^2 : 100^2 = 830 : x$

$$x = \frac{830 \times 10000}{1600} = 5187 \text{ Menschen.}$$

II. Die Gewichte der Kugeln (von einerlei Materie) verhalten sich, wie die Kubusse ihrer Durchmesser:

$$P : p = D^3 : d^3.$$

Wenn nun eine Kugel, deren Durchmesser 2 Zoll ist, 5 Pfund wiegt; wie schwer muß eine andere Kugel seyn, welche 6 Zoll im Durchmesser hat?

Auflösung. $2^3 : 6^3 = \overset{\text{℔}}{5} : \overset{\text{℔}}{x}$

$$x = \frac{5 \cdot 2^3 \cdot 3^3}{2^3} = 27 \cdot 5 = 135 \text{ ℔}.$$

III. Die Preise der Diamanten verhalten sich wie die Quadrate ihrer Gewichte: $A : a = P^2 : p^2$.

Wenn nun ein Diamant, welcher einen Karat schwer ist, 5 fl. gilt; welches wird der Werth jenes berühmten Diamantes von 1680 Karat seyn, welchen der Kaiser von Brasilien besitzt?

Auflösung. $1^2 : 1680^2 = 5 \text{ fl.} : x \text{ fl.}$

$$x = 2822400 \times 5 = 14'112.000 \text{ fl.}$$

IV. Die Räume freifallender Körper verhalten sich wie die Quadrate der Fallzeiten. Nun fällt ein freigelassener Körper in der ersten Sekunde 15,597 rheinische, oder ungefähr 16 bayerische Fuß. Wie viele Sekunden braucht ein Stein, um von einer Höhe von 6000 bayerischen Fuß herabzufallen?

Auflösung. Heißt man die Räume S und s, die Zeiten T und t, so erhält man:

$$s : S = t^2 : T^2;$$

oder auch: $\sqrt{s} : \sqrt{S} = t : T$ (§. 237. II.)

Da nun $s = 16$, $t = 1$, $T = x$, $S = 6000$; so hat man:

$$\sqrt{16} : \sqrt{6000} = 1 : x.$$

$$x = \sqrt{375} = 19{,}365 \text{ Sekunden.}$$

V. Die Stärke des Lichtes nimmt in dem Verhältnisse ab, als das Quadrat der Entfernung des zu beleuchtenden Körpers zunimmt. Wenn nun zwei Kerzen ein Bild in einer Entfernung von 5 Fuß hinlänglich erleuchten; auf wie viele Fuß Entfernung wird man das nämliche Bild bei 128 Kerzen noch eben so deutlich sehen?

Auflösung. Bezeichnet man die Stärke des Lichtes bei der Entfernung E mit V, bei der Entfernung e mit v; so wird, da bei verkehrtem Verhältnisse zweier Gegenstände (in solchem stehen aber Stärke des Lichtes und dessen Entfernung) die zusammengehörigen ungleichbenannten Größen innere und äußere Glieder bilden müssen,

$$V : v = e^2 : E^2$$

bei abnehmender Stärke des Lichtes muß aber zur Hervorbringung der nämlichen Beleuchtung die Anzahl der Kerzen vermehrt werden. Bezeichnet man demnach die Anzahl der bei der Stärke V nöthigen Kerzen mit L, bei v mit l, so wird

$$V : v = l : L.$$

Verbindet man die beiden Proportionen ex aequo simpliciter, so ist

$$l : L = e^2 : E^2$$
$$\sqrt{l} : \sqrt{L} = e : E$$
$$\sqrt{2} : \sqrt{128} = 5 : x$$
$$x = 5\sqrt{\tfrac{128}{2}} = 5\sqrt{64} = 40 \text{ Fuß.}$$

VI. Die Kraft, mit welcher die magdeburgischen Halbkugeln, aus denen die Luft so viel möglich herausgepumpt ist, zusammenhalten, verhält sich, wie die Quadrate der Durchmesser (oder auch Zirkelflächen) dieser Kugeln. — Wenn nun zwei solche Halbkugeln, bei einem Durchmesser von 6 Zollen, mit einer Kraft von

428¾ Pfund zusammenhalten; wie stark werden dieß zwei andere Kugeln thun, deren Durchmesser 12 Zolle ist?

Auflösung. $d^2 : D^2 = v : V$

$6^2 : 12^2 = 428\frac{3}{4} : x$

$$x = \frac{144 \times 1715}{4 \times 36} = 1715 \text{ Pfund.}$$

VII. Ein Uhrpendel, das in einer Sekunde Eine Schwingung machen soll, muß 440,5 pariser Linien lang seyn. Welches muß die Länge eines andern Pendels seyn, das in einer Sekunde zweimal schwingt? — Es verhalten sich aber die Zahlen (N und n) der Schwingungen in der nämlichen Zeit umgekehrt, wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen (L und l) d. i.

$N : n = \sqrt{l} : \sqrt{L}$ oder

$\frac{1}{n} : \frac{1}{N} = \sqrt{l} : \sqrt{L}$

$\frac{1}{n^2} : \frac{1}{N^2} = l : L$

$1 : \frac{1}{4} = 440{,}5 : x$

$x = 110{,}125$ pariser Linien.

* Die übrigen zusammengesetzten Verhältnisse, welche nach der gemeinen Regel fortgehen, kommen im I. Theile dieses Lehrbuches, der die Rechenkunst enthält, vor.

§. 238.

Wenn mehrere Verhältnisse einander gleich sind, so verhält sich die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder wie jedes Vorderglied zu seinem Hintergliede.

Das ist: wenn $a : b = c : d = f : g = h : l$;

so ist $(a + c + f + h) : (b + d + g + l) = a : b = c : d$. etc.

Der Beweis folgt aus §. 233. II.

$a : b = c : d$

$(a + c) : (b + d) = f : g$, nach der Voraussetzung.

$(a + c + f) : (b + d + g) = h : l$

$(a + c + f + h) : (b + d + g + l) = h : l = f : g = c : d = a : b.$

Denn wenn von zwei Verhältnissen jedes dem nämlichen dritten gleich ist, so sind sie auch unter sich gleich.

Auf diesem Satze beruht nun die sogenannte Division in verhältnißmäßige Theile. Z. B. Es soll die Zahl S in vier Theile getheilt werden, welche sich verhalten wie a, b, c, d. — So setze man, diese Theile seyen v, x, y, z; folglich nach der Voraussetzung $a : b = b : c = c : d$

$= v : x = x : y = y : z$

oder $a : b = v : x$

$b : c = x : y$

$c : d = y : z$, oder permutando

$a : v = b : x$, $b : x = c : y$, $c : y = d : z$;

also auch $a : v = b : x = c : y = d : z$.

Mithin $(a+b+c+d) : (v+x+y+z) = a : v = b : x$ u. s. w.

Da nun $v+x+y+z = S$ nach der Voraussetzung, so wird

$$(a+b+c+d) : S = \begin{cases} a : v \\ b : x \\ c : y \\ d : z; \end{cases}$$

d. i. die Summe aller Verhältnißzahlen verhält sich zur Summe aller Theile, als wie jede einzelne Verhältnißzahl zu ihrem entsprechenden Theile.

Dritter Artikel.

Von den geometrischen Progressionen.

§. 239.

Geometrische Progression heißt man eine Reihe von Zahlen, von welchen jede nächstfolgende durch die vorhergehende dividirt, einen gleichen Quotus gibt. Ist nun das erste Glied $= a$, der Quotus oder Exponent $= q$ (welcher bei einer steigenden Progression größer als 1, bei einer fallenden aber ein eigentlicher Bruch seyn muß); so ist der allgemeine Ausdruck einer geometrischen Reihe:

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
a,	aq,	aq^2,	aq^3,	aq^4,	aq^5,	aq^6 .....

Da nun die geometrische Progression nur eine fortgesetzte stetige Proportion ist, so müssen jedesmal drei, unmittelbar auf einander folgende, Glieder wieder eine stetige geometrische Progression geben.

Z. B. $a : aq : aq^2$
$aq : aq^2 : aq^3$
$aq^2 : aq^3 : aq^4$ u. s. w.

§. 240.

Betrachtet man diese Reihe etwas genauer, so findet man

1) daß in jedem Gliede derselben das erste Glied a vorkomme, multiplizirt mit einer Würde von q, deren Exponent so viele Einheiten enthält, als Glieder vorhergehen.

Deßwegen ist das erste Glied $aq^0 = a$.

2) daß, wenn p die Anzahl der Glieder bedeutet, wo die Reihe abgebrochen wird, das allgemeine Glied seyn müsse:

$$a \times q^{p-1}.$$

3) Daß, wenn die Anzahl aller gegebenen Glieder n, und das letzte Glied z heißt,

$$z = a \times q^{n-1} \text{ werde.}$$

$$\text{Folglich auch } a = \frac{z}{q^{n-1}} \text{ und } q = \sqrt[n-1]{\frac{z}{a}}.$$

* Der Werth für n läßt sich nur mit Hülfe der Logarithmen bestimmen.

Der vollständige Ausdruck der geometrischen Progression ist also: $a, aq, aq^2, aq^3, aq^4 \ldots\ldots aq^{n-2}, aq^{n-1}$.

§. 241.

In jeder geometrischen Progression sind die Produkte des ersten und letzten Gliedes, und überhaupt je zweier, von dem ersten und letzten Gliede gleich weit abstehender Glieder gleich, und lassen sich folglich in eine Proportion stellen.

$$\frac{a, \; aq, \; aq^2 \ldots\ldots aq^{n-3}, \; aq^{n-2}, \; aq^{n-1}}{aq^{n-1}, \; aq^{n-2}, \; aq^{n-3} \ldots\ldots aq^2, \; aq, \; a}$$

$a^2q^{n-1}, a^2q^{n-1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Anmerkung. Wenn man die allgemeine Formel geometrischer Reihen durch das erste Glied dividirt, so erhält man: $1, q, q^2, q^3, q^4 \ldots q^{n-2}, q^{n-1}$, worin also alle Glieder Potenzen des zweiten Gliedes sind, übrigens aber das geometrische Verhältniß nicht gestört ist.

§. 242.

Satz. Die Summe jeder geometrischen Reihe ist:

$$S = \frac{q.Z - a}{q-1}.$$

Beweis. Man multiplizirt die Reihe: $a, aq, aq^2, aq^3 \ldots aq^{n-1}$ noch mit dem Exponenten q, und zieht von diesem Produkte die erste einfache Reihe ab. Heißt nun die Summe der einfachen Reihe $= S$, so ist die Summe der mit q multiplicirten $= qS$.

$$S = a + aq + aq^2 + \ldots . aq^{n-2} + aq^{n-1}$$
$$qS = \quad + aq + aq^2 + \ldots . aq^{n-2} + aq^{n-1} + aq^n.$$

Zieht man nun die obere Summe von der untern ab, so erhält man:

$$qS - S = aq^n - a$$

zerfällt:

$$S(q-1) = aq^n - a$$
$$S = \frac{aq^n - a}{q-1}.$$

Nun aber ist $aq^n = aq^{n-1} \times q = Z \times q$ (§. 240.); also substituirt:

$$S = \frac{q.Z - a}{q-1}.$$

Anmerkung. Zu dem nämlichen Resultate gelangt man auch auf folgendem Wege:

Da in einer geometrischen Reihe alle Verhältnisse (der Ordnung nach) gleich sind,

d. i. $a : aq = aq : aq^2$
$aq^2 : aq^3 = aq^3 : aq^4$ u. s. f.

so verhält sich die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder wie das erste zum zweiten u. s. w. (§. 238).

Nun sind in einer geometrischen Reihe alle Glieder, außer dem letzten, Vorderglieder; und alle Glieder, außer dem er-

sten, Hinterglieder. — Es ist also die Summe aller Vorderglieder . . . . . = S — z
die Summe aller Hinterglieder . = S — a;
folglich: (S — z) : (S — a) = a : aq
= 1 : q

$$Sq - qz = S - a$$
$$Sq - S = qz - a$$
$$S(q-1) = qz - a$$
$$S = \frac{qz - a}{q-1} \text{ oder auch } \frac{a.q^n - a}{q-1}.$$

§. 243.

Der allgemeine Ausdruck für die Summation geometrischer Reihen ist zunächst für die steigenden Reihen berechnet; er paßt aber auch für die fallenden, wenn man nur

$$\frac{a.q^n - a}{q-1} \text{ in } \frac{-a.q^n + a}{-q+1} = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a - qz}{1-q}$$

verwandelt, welches geschieht, wenn man Zähler und Nenner mit — 1 multiplizirt; oder wenn man die Reihe qS (§. praec.) als die kleinere, weil q ein eigentlicher Bruch ist, von der größern Reihe S abzieht u. s. w.

Nähere Prüfung der letzten Formel.

In dem Ausdrucke $\frac{a - aq^n}{1-q}$ liegt wirklich das ganze Gesetz einer geometrischen Progression. Man setze

$(a - aq^n) = a(1 - q^n)$, folglich

$\frac{a - aq^n}{1 - q^n} = a \frac{(1 - q^n)}{1 - q}$. Man dividire nun:

$\frac{1 - q^n}{(1-q)} \Big| 1 + q + q^2 + q^3 \ldots\ldots q^{n-1}.$

$1 - q$
$- \quad +$
$(1 - q)$
$q - q^2$
$- \quad +$
$(1 - q)$
$q^2 - q^3$
$- \quad +$
$(1 - q)$
$q^3 - q^4$
$- \quad +$
$\ldots\ldots q^{n-1} - q^n$
$(1 - q)$
$q^{n-1} - q^n$
$- \quad +$
$0.$

Wenn nun: $\frac{1-q^n}{1-q} = 1+q+q^2+q^3 \ldots + q^{n-1}$, so ist auch $\frac{(1-q^n)}{1-q} a = a+aq+aq^2+aq^3 \ldots + aq^{n-1}$.

§. 244.

Aus der Formel $S = \frac{qZ-a}{q-1}$ lassen sich wieder drei Werthe für Z, q, und a finden.— Ueberhaupt erhält man, analog mit §. 219., aus den fünf Stücken a, q, n, Z, S, folgende zwanzig Formeln:

Nro.	Zu suchen.	Gegeben ist.	Formeln.
I.	a.	z. q. n.	$\frac{Z}{q^{n-1}}$.
II.		z. q. S.	$Zq-S\times(q-1)$.
III.		q. n. S.	$\frac{S\times(q-1)}{q^n-1}$.
IV.		z. n. S.	$a.(S-a)^{n-1}-Z.(S-Z)^{n-1}=0$.
V.	z.	a. q. n.	aq^{n-1}.
VI.		a. q. S.	$\frac{a+S.(q-1)}{q}$.
VII.		n. p. S.	$\frac{(Sq-S).q^{n-1}}{q^n-1}$.
VIII.		a. n. S.	$Z.(S-Z)^{n-1}-a.(S-)^{n-1}=0$.
IX.*	q.	a. z. n.	$\text{Log.}\sqrt[n-1]{\frac{z}{a}} = \frac{\text{Log.}\frac{z}{a}}{n-1}$
X.		a. z. S.	$\frac{S-a}{S-z}$.
XI.**		z. n. S.	$q^n-\frac{S}{S-z}\times q^{n-1}+\frac{z}{S-z}=0$.
XII.		a. n. S.	$q^n-\frac{q}{a}\times S+\frac{S}{a}-1=0$.

* Oder $Lq = \frac{Lz - La}{n-1}$.

** Dienlicher ist vielleicht folgende Formel:

$$\frac{S}{S-z} - q - \frac{q-1}{q^{n-1}-1} = 0;$$

denn aus $\frac{S}{S-z} = q + \frac{q-1}{q^{n-1}-1}$ kann q ohne Mühe entweder ganz, oder bis auf einen höchst geringen Fehler gefunden werden.

Nro.	Zu suchen.	Gegeben ist.	Formeln.
XIII.	n.	a. z. q.	$1 + \frac{\text{Log.}\frac{z}{a}}{\text{Log. q}}$.
XIV.		S. z. q.	$1 + \left(\text{Log.}\frac{z}{S - q.(S-z)}\right) : \text{Log.q.}$
XV.		a. S. q.	$\text{Log.}\left(1 + S \times \frac{q-1}{a}\right) : \text{Log. q.}$
XVI.		a. z. S.	$1 + \left(\text{Log.}\frac{z}{a}\right) : \left(\text{Log.}\frac{S-a}{S-z}\right)$.
XVII.	S.	a. z. q.	$\frac{Zq - a}{q-1}$.
XVIII.		n. z. q.	$\frac{Z}{q^{n-1}} \times \frac{q^n - 1}{q-1}$.
XIX.		a. n. q,	$\frac{a \times (q^n - 1)}{q-1}$.
XX.		a. n. z.	$\frac{\sqrt[n-1]{z}\,z - \sqrt[n-1]{a}\,a}{\sqrt[n-1]{z} - \sqrt[n-1]{a}}$

§. 245.

Aufgaben.

I. Ein Gläubiger machte mit seinem Schuldner den Vertrag, daß dieser im ersten Jahre nur zwei Gulden, in jedem nächsten aber dreimal so viel, als im vorhergehenden, bezahlen

sollte. Nach Verlauf von 8 Jahren ward die ganze Schuld getilgt. Was hatte sie betragen?

Auflösung. Hier ist $a = 2$, $q = 3$, $n = 8$; folglich

$$S = \frac{2 \times 3^8 - 2}{2} = \frac{13.120}{2} = 6560 \text{ fl.}$$

II. Wenn man ein Körnlein Weizen aussäet, und dieses 10 Körnlein, und jedes von diesen ausgesäet, jährlich wieder 10 Körnlein bringt; wie viele Körnlein gibt dieß im zwölften Jahre?

Auflösung. $z = 1 \times 100.000'000.000$ Körnlein im zwölften Jahre.

Folglich in zwölf Jahren: 111.111'111.111 Körnlein.

III. Wenn der Erfinder des Schachspiels für das erste Quadratchen einen Heller, für jedes folgende aber das Zweifache des vorhergehenden sich ausbedungen hätte; wie viele Gulden würde die Summe betragen haben?

Auflösung.

$$S = \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 18'''446.744''073.709'551.615 \text{ Hl.}$$

$$= 38.430''716.820'228.232 \text{ fl. } 3 \text{ kr. } 1 \text{ hl.}$$

Anmerkung. Nimmt man an, daß von hundert Personen, ohne Unterlaß, in jeder Sekunde jede Person 10 Karolinen bezahle, so würden sie über 108.716 Jahre zu zahlen haben!

IV. Welches ist die Summe einer geometrischen Reihe, deren erstes Glied 81, das neunte und letzte Glied $\frac{1}{81}$, und der Exponent $\frac{1}{3}$ ist?

Auflösung. Da die Reihe abnehmend ist, so wird

$$S = \frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{81 - 81 \times \frac{1}{81} \times \frac{1}{243}}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{80 + \frac{242}{243}}{\frac{2}{3}} = \frac{(80 + \frac{242}{243})3}{2} = 121\frac{40}{81}.$$

V. Welches ist das erste Glied einer geometrischen Reihe, worin $q = 2$, $n = 12$, $S = 409.500$ ist?

Auflösung. Nach Formel III.:

$$a = \frac{S(q-1)}{q^n - 1} = \frac{409500}{4096 - 1} = 100.$$

§. 246.

Sollen nach dem n^{ten} Gliede einer geometrischen Reihe v Glieder eingeschaltet werden; so muß der Exponent q, mit welchem das n^{te} Glied multiplizirt werden müßte, um das $(n+1)^{te}$ zu erhalten, für dieses und die einzuschaltenden Glieder in $v+1$ gleiche Faktoren zerfällt werden. Daher heißt der Einschaltungsexponent $\sqrt[v+1]{q} = q^{\frac{1}{v+1}}$, das erste einzuschaltende Glied $aq^{n-1} \cdot q^{\frac{1}{v+1}} = aq^{n+\frac{1}{v-1}-1}$, das m^{te} einzuschaltende Glied $aq^{n+\frac{m}{v-1}-1}$.

Z. B. Es sollen in der Reihe 1, 10, 100..., zwischen dem vierten und fünften Gliede 9 Glieder eingeschaltet werden; so sind diese:

$10^3, 10^{3,1}, 10^{3,2}, 10^{3,3}, 10^{3,4}, 10^{3,5}, 10^{3,6}, 10^{3,7}, 10^{3,8}, 10^{3,9}, 10^4,$

Die hier einzuschaltenden Glieder sind Irrationalzahlen. Zwischen je zwei eingeschalteten Gliedern kann man eine neue Anzahl einschalten ꝛc., so daß jede zwischen 1000 und 10000 fallende Zahl als ein zwischen diesen, und überhaupt jede Zahl als ein in obiger Reihe interpolirtes Glied betrachtet werden kann.

Anmerkung. Bei den geometrischen, wie bei den arithmetischen Reihen des ersten Grades wurde das allgemeine Glied der interpolirten Reihe aus dem der Hauptreihe dadurch gefunden, daß $n + \frac{m}{v-1}$ an die Stelle von n gesetzt wurde. Dieß gilt auch von allen andern arithmetischen Reihen, gilt auch von den rekurrenten Reihen. Rekurrent heißt eine Reihe, von der jedes Glied die Summe der Produkte einiger zunächst vorhergehenden Glieder in bestimmte Zahlen, in der nämlichen Ordnung genommen, ist. Eine erschöpfende Abhandlung über diese Reihen gehört nicht in dieses Lehrbuch.

Vierter Artikel.

Von der Summation der unendlichen abnehmenden Reihen.

§. 247.

Eine geometrische Reihe, deren Exponent eine eigentliche Fraktion ist, und deren letztes Glied nicht dargestellt werden kann, heißt eine unendliche abnehmende Reihe.

Z. B. Es sey das erste Glied 1, der Exponent $\frac{1}{2}$, und $n = \infty$.

so erhält man: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64} \ldots\ldots \frac{1}{\infty}$;

oder wenn $a = 1$, $q = \frac{1}{3}$, $n = \infty$;

so ergibt sich: $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243} \ldots\ldots \frac{1}{\infty}$.

Erklärung. Da eine solche abnehmende Reihe ohne Aufhören fortläuft, und der Werth der Glieder in eben dem Verhältnisse abnimmt, als viele Glieder genommen werden; so muß man das ∞^{te} oder n^{te} Glied als etwas unendlich Kleines annehmen. Denn da $z = aq^{n-1}$, q aber, nach der Voraussetzung eine eigentliche Fraktion, also $= \frac{1}{\pi}$, und $n = \infty$ ist; so wird $z = \frac{a}{\pi\infty}$, d. i. der Nenner π muß unendlich oft mit sich selbst multiplizirt werden. Also $Z = \frac{1}{\infty} =$ unendlich klein, d. i. es nähert sich immer mehr dem Nullwerthe, und ist an der Grenze $= 0$. Für eine unendliche abnehmende Reihe ist die Grenze, welcher sich ihre Summe immer mehr nähert, je mehr man Glieder nimmt, Summe der ganzen Reihe. Folglich geht die Formel $S = \frac{a - qz}{1 - q}$ für eine unendliche abnehmende Reihe, in folgende, als deren Grenzwerth, über:

$$S = \frac{a}{1 - q}$$

Man ist also dadurch in den Stand gesetzt, die Summe jeder solchen unendlichen Reihe zu finden.

§. 248.

Aufgaben.

I. Die Summe der Reihe: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \ldots\ldots \frac{1}{\infty}$ zu finden.

Auflösung. Hier ist $a = 1$, $q = \frac{1}{2}$

$$\text{Also } S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Die Summe für n Glieder wäre:

$$S = \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2^n - 1}{2^n} \times \frac{2}{1} = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}}.$$

II. Die Summe der Reihe: $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81} \ldots \frac{1}{\infty}$ zu finden.

Auflösung. Hier ist $a = 1$, $q = \frac{1}{3}$.

$$\text{Also } S = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}.$$

III. Die Summe einer Reihe zu finden, worin das erste Glied a, der Exponent $\frac{b}{c}$ —, so daß $b < c$ —, und $n = \infty$ ist.

Auflösung. $\Sigma = a + \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} \ldots$

Hier ist $q = \frac{b}{c}$;

$$\text{also } \Sigma = \frac{a}{1-\frac{b}{c}} = \frac{ac}{c-b}.$$

Anmerkung. Sollten die Zeichen der Glieder wechseln, wie z. B. in der Reihe:

$$A - \frac{Ax}{y} + \frac{Ax^2}{y^2} - \frac{Ax^3}{y^3} + \frac{Ax^4}{y^4} \ldots;$$

so setze man $q = -\frac{x}{y}$; und die Summe wird seyn: $\Sigma = \frac{A}{1+\frac{x}{y}} = \frac{Ay}{y+x}$.

§. 249.

Zu den unendlichen abnehmenden geometrischen Reihen gehören auch die unendlichen Dezimalbrüche, deren Natur hier näher zu untersuchen ist.

I. Man habe den unendlichen Dezimalbruch:

0,333333 .....

Dieser läßt sich auch so darstellen:

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \ldots$$
$$= 3.\frac{1}{10} + 3.\left(\frac{1}{10}\right)^2 + 3.\left(\frac{1}{10}\right)^3 + 3.\left(\frac{1}{10}\right)^4 \ldots\ldots$$

Hier ist offenbar $a = 0{,}3$, $q = \frac{1}{10}$.

$$\text{Also: } \Sigma = \frac{0{,}3}{1-\frac{1}{10}} = \frac{3}{10} \times \frac{10}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Nehme ich zwei Ziffern als erstes Glied, so wird $a = 0{,}33$, folglich $q = \frac{1}{100}$.

Denn

Denn 0,3333 .... ist auch

$$= 0{,}33 + \left(0{,}33 \times \frac{1}{10^2}\right) + \left(0{,}33 \times \frac{1}{10^4}\right) \ldots\ldots$$

so ergibt sich $\Sigma = \frac{0{,}33}{1-0{,}01} = \frac{33}{99} = \frac{1}{3}$ u. s. f.

II. Man habe den unendlichen Dezimalbruch 0,272727

$$= 0{,}27 + \left(0{,}27 \times \frac{1}{100}\right) + \left(0{,}27 \times \frac{1}{100^2}\right) + \ldots.$$

So ist $a = 0{,}27$,
$q = 0{,}01$.

Folglich: $\Sigma = \frac{0{,}27}{1-0{,}01} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$.

Stellt man allgemein die immer wiederkehrenden Ziffern, d. i. die Periode, durch $\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\vartheta$ vor, so ist der Werth des Dezimalbruches: $0{,}\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\vartheta\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta = \frac{\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\delta}{10^n - 1}$, wo n die Anzahl der wiederholten Ziffern anzeigt; denn $a = \frac{\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\vartheta}{10^n}$, $q = \frac{1}{10^n}$, mithin $S = \frac{\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\vartheta}{10^n} : \left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = \frac{\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\vartheta}{10^n} \times \frac{10^n}{10^n - 1} = \frac{\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\vartheta}{10^n - 1}$

III. Man habe endlich den Dezimalbruch 0,41666 ... Hier beginnt der unendliche Dezimalbruch offenbar erst mit der dritten Zifferstelle: 0,006666 ....

Also ist $a = 0{,}006$,
$q = 0{,}1$.

Folglich $\Sigma = \frac{0{,}006}{1-0{,}1} = \frac{0{,}006}{0{,}9} = \frac{6}{900}$.

Addirt man dazu noch: $\frac{41}{100}$; so wird

$$\frac{41}{100} + \frac{6}{900} = \frac{369+6}{900} = \frac{375}{900} \overset{75}{=} \frac{5}{12}.$$

Anmerkung. Es geht aus der Natur der Dekadik hervor, daß jede gemeine Fraktion, deren Nenner ein Produkt aus 2^n, 5^n, 10^n, und einem in 1000 .... nicht enthaltenen Faktor, z. B. 3, 7, 11, 13, 17 ist, wenn man sie in einen Dezi-

malbruch verwandelt, (d. i. den Zähler mit 10,100,1000... multiplizirt, dieses Produkt durch den Nenner dividirt, und unter den Quotienten 10,100,1000.... als Divisor schreibt;) einen doppelten Dezimalbruch gibt, einen endlichen und einen unendlichen. Der unendliche kann seinem Begriffe zu Folge nur zuletzt stehen.

Z. B. Es sey $\frac{1}{6}$ in einen Dezimalbruch zu verwandeln; so erhält man: 0,16666....

Es ist nämlich $\frac{1}{6} = \frac{1}{2.3} = \frac{1.100000...}{2.3.100000...} = \frac{50000...}{3.100000...}$

$$= \frac{16666...}{100000...} = 0,16666.$$

Nennt man nun allgemein den endlichen Dezimalbruch 0,ABCD...., den unendlichen aber, wie oben $\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\vartheta\beta\gamma$...; so ist der Werth eines Dezimalbruches 0,ABCD... $\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\vartheta\beta\gamma$....

$\Sigma = \frac{ABCD...}{10^m} + \frac{\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\vartheta}{(10^n - 1)\,10^m}$, wo m die Zahl der Ziffern im endlichen Dezimalbruche, n aber die der wiederkehrenden Ziffern (die Periode) im unendlichen Dezimalbruche bezeichnet.

III. Hauptstück.

Von den Logarithmen.

Vorbegriffe.

§. 250.

Jede positive, sowohl ganze, als gebrochene Zahl — die Einheit (1) ausgenommen — kann, wenn sie stufenweise zu allen möglichen Potenzen, sowohl mit ganzen als gebrochenen Exponenten, erhoben wird, den Werth jeder andern Zahl erlangen, so groß oder klein diese immer seyn mag.

Erklärung. I. Es sey eine solche Zahl allgemein B.

Man schreibe nun drei Zahlenreihen L, M, N, Glied für Glied untereinander.

1) Die Reihe L sey eine arithmetische Progression, in welcher $a = 0$, $d = 1$.

2) Die Reihe M sey eine geometrische Progression; $a = 1$, $q = B$, oder auch $a = B^{\circ}$.

3) Die Reihe N endlich sey die nämliche geometrische Progression, aber in einer bestimmten Zahl ausgedrückt, z. B. $B = 2$.

L. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 . . . n

M. $B^{\circ}, B^{1}, B^{2}, B^{3}, B^{4}, B^{5}, B^{6} \ldots B^{n}$

N. $\begin{cases} 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 \ldots 2^{n} \\ 2^{\circ}, 2^{1}, 2^{2}, 2^{3}, 2^{4}, 2^{5}, 2^{6} \ldots 2^{n} \end{cases}$

II. Man sieht hier offenbar, daß die Zahl 2 den Werth der Zahlen 1, 2, 4, 8, 16, 32 u. s. w. annehmen könne, wenn man sie zu den Potenzen: 0, 1, 2, 3, 4, 5 . . . erhebt.

Aber auch den Werth der Zahlen 3, 5, 6, 7, 9 . . . wird die nämliche Zahl 2 erlangen können, wenn man bedenkt, daß zwischen der ersten und zweiten, zweiten und dritten Potenz, noch unendlich viele Mittelpotenzen mit gebrochenen Exponenten statt haben, oder daß zwischen je zwei Gliedern einer Reihe unendlich viele andre eingeschaltet werden können. (Vgl. §. 246 u. §. 221.)

III. Die Zahlen in der Reihe L, welche mit den Exponenten von B (und hier von 2) einerlei sind, bestimmen die Anzahl der Verhältnisse (Λόγων ἀριθμόν) für die unter ihnen stehenden Glieder der Reihen M und N, und heißen überhaupt Logarithmen.

Z. B. Bis auf B^{1} ist ein Verhältniß, $B^{\circ} : B$.

Bis B^{2} sind zwei Verhältnisse, $B^{\circ} : B = B : B^{2}$.

Bis B^{3} sind drei Verhältnisse, $B^{\circ} : B = B : B^{2} = B^{2} : B^{3}$.

Bis B^{n} sind n Verhältnisse. Vergl. §. 235. V.

IV. Die Reihen L, M, N können auch fallend seyn.

L. 2, 1, 0, —1, —2, —3, —4 . . . —n

M. $B^{2}, B^{1}, B^{\circ}, A^{-1}, B^{-2}, B^{-3}, B^{4} \ldots B^{-n}$

N. $\begin{cases} 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \cdots \frac{1}{2^{n}} \\ 2^{2}, 2^{1}, 2^{\circ}, 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4} \ldots 2^{-n}. \end{cases}$

Also kann die Zahl 2 auch den Werth von Fraktionen annehmen.

§. 251.

Die Logarithmen sind also nichts anders, als die Exponenten derjenigen Würden, zu denen eine Zahl (B) erhoben werden muß, um was immer für einer andern Zahl gleich zu werden.

I. Wenn nun $B^x = a$, und $B^y = b$; so ist x der Logarithmus von a, und y der Logarithmus von b. B selbst heißt die Basis oder Grundzahl.

II. Um den Logarithmus einer Zahl a, oder b zu bezeichnen, setzt man vor dieselbe Log. oder bloß L, l.

Log. a = x. Also auch: $B^{\log. a} = a$.
Log. b = y. $B^{\log. b} = b$.

III. Die Logarithmen, welche bei einer bestimmten Basis einer jeden Zahl zukommen, heißen ein Logarithmen-System.

Zusatz 1. Die Dignitäten in einem Logarithmen-Systeme nennt man oft auch Proportionalzahlen, weil diese in einer geometrischen Progression fortschreiten, während die Logarithmen selbst in einer arithmetischen Progression zunehmen.

Z. B. in B^x würde nach und nach

x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 u. s. w.,

so wird $B^x = 1, B, B^2, B^3, B^4, B^5, B^6, B^7$ u. s. w.

Zusatz 2. An und für sich kann jede Zahl als Basis eines Logarithmensystemes angenommen werden, außer 1, weil 1 zu was immer für einer Potenz erhoben 1 bleibt, folglich den Werth keiner andern Zahl erlangen kann; daher sind sehr viele Logarithmensysteme gedenkbar. In dem gemeinen Logarithmensysteme, welches auch das briggische heißt, ist die Basis B = 10 gesetzt. Die Logarithmen dieses Systems heißen überhaupt die briggischen.

Anmerkung. I. Der Erfinder der Logarithmen ist Johann Neper, Baron von Marchiston; wenigstens von ihm erschien das erste logarithmische Werk unter dem Titel: Mirifici canonis logarithmorum descriptio; Edinburgi 1614. Fast gleichzeitig, und ohne von Neper zu wissen, berechnete die Logarithmen ein Deutscher, Jobst Byrg, in seinen Progreßtabulen, welche zu Prag 1620 gedruckt wurden. Heinrich Briggs, Professor der Geometrie zu Oxfort, richtete sie bequemer ein, indem er 10 zur Basis annahm, und berechnete die Logarithmen der Zahlen 1—20.000, und von 90000—100.000. Die Berechnung der Logarithmen für die Zahlen 20.000—90.000 hatte Adrian Blacq, ein Holländer, gemacht. Am weitesten wurde die Berechnung der Logarithmen

getrieben von Abraham Scharp (auf 60 Dezimalen) und Wolfram (auf 48 Dezimalen). — In Deutschland sind die bekanntesten Ausgaben logarithmischer Tafeln:

1) Vega's logarithmisch-trigonometrisches Handbuch; Leipzig bei Weidmann 1830. Stereotypenausgabe.
2) Joh. Karl Schulze's Sammlung logarithmisch-trigonometrischer Tafeln; Berlin bei Mylius 1778.
3) Adrian Vlacq's Tabellen der Logarithmen für alle ganze Zahlen von 1—10.000, herausgegeben von Joh. Jak. Ebert. Frankfurt am Main bei Fleischer 1790.
4) J. de la Lande's logarithmisch-trigonometrische Tafeln, herausgegeben von Köhler. Leipzig bei Tauchnitz 1827. Diese sind deshalb besonders zu empfehlen, weil sie auch die Gaußischen Tafeln enthalten, mittelst welcher man aus den Logarithmen zweier Zahlen den Logarithmus ihrer Summe und Differenz leicht berechnen kann.

Von größern logarithmischen Tafeln sind gegenwärtig die bedeutendsten:

G. Vega, thesaurus logarithmorum completus. Lipsiae 1794.

F. Callet, Tables portatives de Logarithmes. Edition stéréotype. Paris 1795.

Anmerkung. II. Die Logarithmen leisten in der Mathematik die wichtigsten Dienste. Mittelst ihrer verwandelt sich die Multiplikation und Division in eine Addition und Subtraktion, das Potenziren und Wurzelausziehen in eine einfache Multiplikation und Division. Ohne Logarithmen würde man jene Aufgaben, worin die Exponenten unbekannt sind, gar nicht lösen können. Ueberdieß können die trigonometrischen Linien nur mittelst der Logarithmen berechnet werden.

Erster Artikel.

Von den briggischen Logarithmen.

§. 252.

Da in dem briggischen Logarithmensysteme die Grundzahl $B = 10$ ist, so verwandeln sich die Reihen L, M, N (§. 250. I. IV.) in folgende:

L.	—3.	—2.	—1.	0.	1.	2.	3.	4....
M.	10^{-3}.	10^{-2}.	10^{-1}.	10^{0}.	10^{1}.	10^{2}.	10^{3}.	10^{4}.
N.	$\frac{1}{1000}$.	$\frac{1}{100}$.	$\frac{1}{10}$.	1.	10.	100.	1000.	10.000.

Da nun die Reihe L die Logarithmen für die entsprechenden Zahlen in der Reihe N anzeigt, so ist

Log. 1 = 0 oder 0.0000000
Log. 10 = 1 . . . 1.0000000
Log. 100 = 2 . . . 2.0000000
Log. $\frac{1}{10}$ = —1 . . —1.0000000 u. s. w.

Für alle Zahlen, welche nicht in der Reihe N enthalten sind, sind die Logarithmen Fraktionen, und zwar für die Zahlen von 1—10 (exklusive) eigentliche Fraktionen, für die übrigen uneigentliche. Diese Fraktionen sind als Dezimalbrüche gewöhnlich von 5 oder 7 Dezimalstellen dargestellt.

Man nennt die in einem Logarithmus vorkommende ganze Zahl die Charakteristik oder die Kennziffer, die Dezimalen hingegen die Mantisse (welche von der Charakteristik durch einen Punkt getrennt wird). Aus Obigem ergibt sich:

I. Für jede ganze Zahl, welche aus n Zifferstellen besteht, ist die Charakteristik n—1. Jede nzifferige Zahl fällt nämlich zwischen 10^{n-1} und 10^{n}, indem 10^{n-1} die kleinste Zahl mit n und 10^{n} die kleinste mit n+1 Ziffern ist. Der Logarithmus von 10^{n-1} ist aber n—1, von 10^{n} ist er n, daher muß der Logarithmus jeder nzifferigen > n—1 und < n seyn, d. i. er ist gleich n—1 sammt einem Bruche.

Also für die Zahl 99 = 1, ...
999 = 2, ...
9999 = 3, ...
1000.000 = 6, ...

II. Ganze Zahlen und uneigentliche Brüche fordern positive, eigentliche Brüche aber negative Logarithmen.

§. 253.

Satz. Der Logarithmus eines Produktes ist der Summe aus den Logarithmen der Faktoren gleich, d. i.

$$\text{Log. } (a \cdot b) = \text{Log. } a + \text{Log. } b.$$

Beweis. Es sey für das briggische Logarithmensystem B = δ (δέκα, zehn).

$$\begin{array}{l} a = \delta^x \\ b = \delta^y \\ \hline a.b = \delta^{x+y} \text{ (§. 73.)} \end{array}$$

mithin $\begin{array}{l} \text{Log. } a = x \\ \text{Log. } b = y \\ \hline \text{folglich Log.}(ab) = x + y = \text{Log. } a + \text{Log. } b. \end{array}$

Folgesätze. I. Da nun $\begin{array}{l} \text{Log. } 2 = 0{,}3010300 \\ \text{und Log. } 10 = 1{,}0000000 \\ \hline \text{So ist Log. } 20 = 1{,}3010300. \end{array}$

Hat man also die Logarithmen der Primzahlen, so darf man sie nur addiren, um die Logarithmen der zusammengesetzten zu erhalten:

Log. 2 + Log. 3 = Log. 6.
Log. 2 + Log. 5 = Log. 10.
Log. 2 + Log. 7 = Log. 14 u. s. w.

II. Es ist Log. (9624.10) = Log. 9624 + Log. 10
Log. (9624.100) = Log. 9624 + Log. 100
Log. (9624.1000) = Log. 9624 + Log. 1000

Nun findet man in den Tafeln:

Log. 9624 = 3,9833556, folglich

Log. 96240 = 3,9833556 + 1 = 4,9833556,
Log (9624.100) = Log. 962400 = 3,9833556 + 2 = 5,9833556
Log. 9624000 = 3,9833556 + 3 = 6,9833556.

Hängt man also einer Zahl am Ende Nullen an, so wird sich der Logarithmus der vergrößerten Zahl nur rücksichtlich der Charakteristik vom Logarithmus der ersten Zahl unterscheiden.

III. Log. (ab(c−d)) = Log. a + Log. b + Log. (c—d)

§. 254.

Satz. Man erhält den Logarithmus eines Quotienten, wenn man den Logarithmus des Divisors von dem Logarithmus des Dividends abzieht, d. i.

$$\text{Log.}\left(\frac{a}{b}\right) = \text{Log. } a - \text{Log. } b.$$

Beweis. $a = \delta^x$ mithin $\text{Log. } a = x$

$b = \delta^y$ $\text{Log. } b = y$

$\frac{a}{b} = \delta^{x-y}$ (§. 73.); — folglich $\text{Log. } \frac{a}{b} = x - y$

$= \text{Log. } a - \text{Log. } b.$

Folgesätze.

I. Man findet den Logarithmus eines Bruches, wenn man vom Logarithmus des Zählers den Logarithmus des Nenners subtrahirt. Ist der Bruch ein ächter, so wird der Logarithmus negativ. Z. B.

$$\text{Log.}\left(\frac{5}{6}\right) = \text{Log. } 5 - \text{Log. } 6.$$

Es ist nun $\text{Log. } 5 = 0{,}6989700$

$\text{Log. } 6 = 0{,}7781513$

$$\text{Log.}\left(\frac{5}{6}\right) = -0{,}0791813.$$

Man sucht aber negative Logarithmen zu vermeiden; zu diesem Zwecke addirt man zur Charakteristik des Logarithmus vom Zähler so viele Einheiten, als nothwendig ist, damit der Logarithmus des Nenners davon subtrahirt werden könne, und setzt am Ende eine Zahl von eben so Einheiten mit dem Zeichen — hinzu. Obige Rechnung wird demnach so geführt werden können.

	+1	−1
Log. 5	= 0,6989700	
Log. 6	= 0,7781513	
Log. $\left(\frac{5}{6}\right)$	= 0,9208187	−1

II. Aus dem Vorhergehenden ergibt sich auch, wie der Logarithmus eines Dezimalbruches gefunden werde.

$\text{Log. } 96{,}24 = \text{Log.}\left(\frac{9624}{100}\right) = \text{Log. } 9624 - \text{Log. } 100 =$
$3{,}9833556 - 2 = 1{,}9833556$

$\text{Log. } 9{,}624 = \text{Log. } 9624 - \text{Log. } 1000 = 3{,}9833558 - 3$
$= 0{,}9833556$

$\text{Log. } 0{,}9624 = \text{Log. } 9624 - \text{Log. } 10000 = 3{,}9833556 - 4$
$= 0{,}9833556 - 1$

$\text{Log. } 0{,}09624 = 3{,}9833556 - 5 = 0{,}9833556 - 2$

$\text{Log. } 0{,}009624 = 3{,}9833556 - 6 = 0{,}9833556 - 3$

Soll daher der Logarithmus eines Dezimalbruches gesucht werden, so findet man die Mantisse, indem man den Dezimalbruch

als ganze Zahl betrachtet. Die Charakteristik bestimmt man nach der Anzahl der Zifferstellen der Ganzen, wenn solche gegeben sind. Sind keine Ganzen gegeben, so wird der Mantisse als Charakteristik 0 vorgesetzt, und am Ende eine Zahl, welche so viele Einheiten hat, als den bedeutsamen Ziffern Nullen vorhergehen, negativ angehängt.

III. $\text{Log.}\left(\frac{a}{bc}\right) = \text{Log. a} - (\text{Log. b} + \text{Log. c})$.

§. 255.

Satz. Den Logarithmus von der Potenz einer Zahl erhält man, wenn man den Logarithmus der Zahl mit dem Exponenten der Potenz multiplizirt;

d. i. $\text{Log. } A^n = n \,.\, \text{Log. A}$.

Beweis. $A = \delta^x$; also $\text{Log. A} = x$.

(§. 78.) $A^n = \delta^{nx}$

folglich $\text{Log. } A^n = nx$

$= n \,.\, \text{Log. A}$.

Folgesatz. Da nun Log. 2 = 0.3010300 ist;

so wird Log. 2^2 = Log. 4 = 0.6020600

Log. 2^3 = Log. 8 = 0.9030900

Log. 2^6 = Log. 64 = 1.8061800.

Aufgaben. 1) $\frac{(a+b)c^2}{d^3}$ logarithmisch auszudrücken.

$$\text{Log.}\left(\frac{(a+b)c^2}{d^3}\right) = \text{Log.}((a+b)c^2) - \text{Log. } d^3$$
$$= \text{Log.}(a+b) + 2\,\text{Log. c} - 3.\text{Log. d.}$$

2) $\frac{a^2-b^2}{bc^2}$ logarithmisch auszudrücken.

$$\text{Log.}\left(\frac{a^2-b^2}{bc^2}\right) = \text{Log.}((a+b)(a-b)) - \text{Log.}(bc^2)$$
$$= \text{Log.}(a+b) + \text{Log.}(a-b) - (\text{Log b} + 2.\text{Log c})$$

§. 256.

Satz. Den Logarithmus einer Wurzel erhält man, wenn man den Logarithmus der Würde durch den Wurzelexponenten dividirt;

d. i. $\text{Log.} \sqrt[n]{A} = \frac{\text{Log. A}}{n}$.

Beweis. $A = \delta^x$; also Log. $A = x$.

$\sqrt[n]{A} = \delta^{\frac{x}{n}}$ (§. 91); folglich Log. $\sqrt[n]{A} = \frac{x}{n} = \frac{\text{Log. } A}{n}$.

Aufgabe. $\sqrt{\frac{ab^3}{c-d}}$ logarithmisch auszudrücken.

Auflösung. $\text{Log.} \sqrt{\frac{ab^3}{c-d}} = \frac{\text{Log.}(ab^3) - \text{Log.}(c-d)}{2}$

$$= \frac{\text{Log. a} + 3.\text{Log. b} - \text{Log.}(c-d)}{2}.$$

§. 257.

Verbindet man die Fälle §§. 253. 254. mit einander, so ist man auch in den Stand gesetzt, jede diskrete oder stetige geometrische Proportion logarithmisch auszudrücken.

I. $A : B = C : D$

$A . D = B . C$

$\text{Log.}(A . D) = \text{Log.}(B . C)$

$\text{Log. } A + \text{Log. } D = \text{Log. } B + \text{Log. } C$

$\text{Log. } A - \text{Log. } B = \text{Log. } C - \text{Log. } D.$ (§. 211. Folgesatz).

Stehen also 4 Zahlen in einer geometrischen Proportion, so bilden ihre Logarithmen eine arithmetische.

Soll D aus den übrigen Größen bestimmt werden, so ist

$$\text{Log. } D = \text{Log. } B + \text{Log. } C - \text{Log } A.$$

II. $A : C : B$

$C^2 = AB$

$2\,\text{Log. } C = \text{Log. } A + \text{Log. } B$, $\text{Log. } C = \frac{\text{Log. } A + \text{Log. } B}{2}$.

$\text{Log. } A - \text{Log. } C - \text{Log. } B$ (§. 213);

d. h.: Wenn C die mittlere geometrische Proportionalzahl von A, B ist, so ist Log. C die mittlere arithmetische Proportionalzahl zu den Logarithmen von A und B.

§. 258.

Mittelst dieser letzten Aufgabe ist man in den Stand gesetzt, für was immer für eine gegebene Zahl, z. B. für 3, den briggi-

schen Logarithmus zu finden. — Es sey $A = 1$, $B = 10$, und $\text{Log. } A = 0$, $\text{Log. } B = 1$;

$$\text{so ist } C = \sqrt{AB} = \sqrt{10} = 3{,}1622771$$

$$\text{und } \text{Log. } C = \frac{0+1}{2} = 0{,}50000000.$$

Nun suche man ferner zwischen A und C die mittlere geometrische Proportionalzahl, so wird

$$D = \sqrt{AC} = 1{,}7782794$$

$$\text{und } \text{Log. } D = \frac{\text{Log. } A + \text{Log. } C}{2} = 0{,}25000000.$$

Setzt man diese Operation so lange fort, bis zur mittlern geometrischen Proportionalzahl 3 erscheint, so erhält man auf besagte Weise den Logarithmus von 3.

Folgende Tabelle stellt das ganze Verfahren dar.

Tabelle zur Berechnung des briggischen Logarithmus der Zahl 3.

A = 1,0000000	. . . .	Log. A = 0.0000000.000	
B = 10,0000000	. . . .	L.B = 1.0000000.000	
C = 3,1622777	$C = \sqrt{AB}$	L.C = 0,5000000.0000	$L.C = \frac{L.A + L.B}{2}$
D = 1,7782794	$D = \sqrt{AC}$	L.D = 0,2500000.0000	$L.D = \frac{L.A + L.C}{2}$
E = 2,3713737	$E = \sqrt{CD}$	L.E = 0,3750000.0000	$L.E = \frac{L.C + L.D}{2}$
F = 2,7384196	$F = \sqrt{CE}$	L.F = 0,4375000.000	$L.F = \frac{L.C + L.E}{2}$
G = 2,9427272	$G = \sqrt{CF}$	L.G = 0,4687500.000	$L.G = \frac{L.C + L.F}{2}$
H = 3,0505279	$H = \sqrt{CG}$	L.H = 0,4843750.0000	$L.H = \frac{L.C + L.G}{2}$
I = 2,9961427	$I = \sqrt{GH}$	L. I = 0,4765625.0000	$L.I = \frac{L.G + L.H}{2}$
K = 3,0232131	$K = \sqrt{HF}$	L.K = 0,4804687.5	$L.K = \frac{L.H + L.F}{2}$
L = 3,0096474	$L = \sqrt{IK}$	L.L = 0,4785156.25	$L.L = \frac{L.I + L.K}{2}$
M = 3,0028875	$M = \sqrt{IL}$	L.M = 0,4775390.625	$L.M = \frac{L.I + L.L}{2}$
N = 2,9995132	$N = \sqrt{IM}$	L. N = 0,4770507.8125	$L.N = \frac{L.I + L.M}{2}$

$O = 3{,}0011999$	$O = \sqrt{MN}$	$L.O = 0{,}4772949.21875$	$L.O = \frac{L.M + L.N}{2}$
$P = 4{,}0003564$	$P = \sqrt{NO}$	$L.P = 0{,}4771728.515625$	$L.P = \frac{L.N + L.O}{2}$
$Q = 2{,}9999348$	$Q = \sqrt{NP}$	$L.Q = 0{,}4771118.1640625$	$L.Q = \frac{L.N + L.P}{2}$
$R = 3{,}0001456$	$R = \sqrt{PQ}$	$L.R = 0{,}4771423.33984$	$L.R = \frac{L.P + L.Q}{2}$
$S = 3{,}0000402$	$S = \sqrt{QR}$	$L.S = 0{,}4771270.751953$	$L.S = \frac{L.Q + L.R}{2}$
$T = 2{,}9999875$	$T = \sqrt{QS}$	$L.T = 0{,}4771194.458007$	$L.T = \frac{L.Q + L.S}{2}$
$V = 3{,}0000138$	$V = \sqrt{ST}$	$L.V = 0{,}4771232.6049804$	$L.V = \frac{L.S + L.T}{2}$
$W = 3{,}0000007$	$W = \sqrt{TV}$	$L.W = 0{,}4771213.5314941$	$L.W = \frac{L.T + L.V}{2}$
$X = 2{,}9999941$	$X = \sqrt{TW}$	$L.X = 0{,}4771203.9947509$	$L.X = \frac{L.T + L.W}{2}$
$Y = 2{,}9999974$	$Y = \sqrt{WX}$	$L.Y = 0{,}477120.87631225$	$L.Y = \frac{L.W + L.X}{2}$
$Z = 2{,}9999990$	$Z = \sqrt{WY}$	$L.Z = 0{,}4771211.1473083$	$L.Z = \frac{L.W + L.Y}{2}$
$v = 2{,}9999999$	$v = \sqrt{WZ}$	$L.v = 0{,}4771212.3394012$	$L.v = \frac{L.W + L.Z}{2}$
$\Phi = 3{,}0000002$	$\Phi = \sqrt{Wv}$	$L.\Phi = 0{,}4771212{,}9357476$	$L.\Phi = \frac{L.W + L.v}{2}$
$x = 3{,}00000006$	$x = \sqrt{v\Phi}$	$L.x = 0{,}4771212{,}637244$	$L.x = \frac{L.v + L.\Phi}{2}$
$\Psi = 2{,}99999996$	$\Psi = \sqrt{vx}$	$L.\Psi = 0{,}4771212{,}4884128$	$L.\Psi = \frac{L.v + L.x}{2}$
$\omega = 3{,}00000001$	$\omega = \sqrt{x\Psi}$	$L.\omega = 0{,}4771212.5629186$	$L.\omega = \frac{L.x + L.\Psi}{2}$

Aus dieser Berechnung mag man sich einen Begriff von der unendlichen Mühe machen, welche die Erfinder der Logarithmen hatten, um die Logarithmen für alle Primzahlen zu finden. — Doch weiß man heut zu Tage einen kürzern Weg, durch die Funktionen die Logarithmen zu finden.

§. 259.

Aufgabe. Eine Gleichung zu lösen, worin die unbekannte Größe als Würde oder Wurzelexponent vorkommt,

z. B. $A^x = \frac{S-d}{c}$.

Auflösung.

Man reduzire die Gleichung so, daß die Größe, deren Wurzel- oder Wurzelexponent unbekannt ist, allein und zwar positiv auf einer Seite stehe, und setze für die bekannten Größen ihre Logarithmen. Da nun in der logarithmisirten Gleichung die unbekannte Größe nicht mehr als Exponent, sondern als Faktor oder Divisor vorkommt, so kann ihr Werth nach den gewöhnlichen Regeln der Gleichungen gefunden, und die Gleichung gelöset werden.

$$\text{Also } A^x = \frac{S-d}{c}$$

$$x \,.\, \text{Log. } A = \text{Log. } (S-d) - \text{Log. } c.$$

$$x = \frac{\text{Log. } (S-d) - \text{Log. } c}{\text{Log. } A}.$$

Beispiele.

I. Aus dem letzten und ersten Gliede einer geometrischen Reihe: $Z = a \,.\, q^{n-1}$ die Gliederanzahl n zu bestimmen.

Auflösung. $a \,.\, q^{n-1} = Z$

$$q^{n-1} = \frac{Z}{a}$$

$$(n-1) \,.\, \text{Log. } q = \text{Log. } Z. - \text{Log. } a$$

$$n = 1 + \frac{\text{Log. } Z - \text{Log. } a}{\text{Log. } q}.$$

II. Einem Spione versprach man für die erste Minute seines Aufenthaltes im feindlichen Lager, um wichtige Nachrichten einzuziehen, einen Gulden; für die zweite 2 Gulden, und für jede folgende das Doppelte. Er war glücklich und erhielt 32.767 fl. Wie lange war er im Lager geblieben?

Auflösung. Hierzu dient die Formel:

$$S = \frac{a \,.\, q^n - a}{q-1}$$

$a = 1$
$S = 32767$
$q = 2$
$n = x.$

$$q^x = \frac{Sq - S + a}{a} = 1 + S \,.\, \left(\frac{q-1}{a}\right).$$

$$\text{Logarithmisirt: } x = \frac{\text{Log.}\left[1 + S.\left(\frac{q-1}{a}\right)\right]}{\text{Log. } q} = \frac{\text{Log. } 32768}{\text{Log. } 2}.$$

$$x = \frac{4.5154499}{0.3010300} = 15 \text{ Minuten} = \tfrac{1}{4} \text{ Stunde.}$$

Anmerkung. Die letzten Dezimalen des Dividends 0,0000499 sind 0,00005 gleich zu achten. Da nämlich 32768 die fünfzehnte Potenz von 2 ist, so muß der Log. 2 in dem Log. 32768 genau 15mal enthalten seyn. Der kleine Fehler im Quotienten rührt von einer kleinen Unrichtigkeit in den Logarithmen her.

III. In einem Fasse sind a Maß Wein. Es werden b Maß Wein herausgelassen, und eben so viele Maß Wasser nachgegossen; und dieß wird so oft wiederholt, bis noch $\frac{a}{d}$ Maß Wein im Fasse sind. Wie oft dürfen nun b Maß Wein herausgelassen, und b Maß Wasser nachgegossen werden?

Auflösung. Es ist nach dem letzten oder n^{ten} Aufguße noch $\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}}$ Wein im Fasse; daher

$$\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}} = \frac{a}{d}, \text{ und}$$

$$(a-b)^n = \frac{a^n}{d}, \text{ folglich}$$

$$n \times \text{Log.}(a-b) = n \times \text{Log. } a - \text{Log. d. und}$$
$$n\,[\text{Log. } a - \text{Log.}(a-b)] = \text{Log. d.}$$

$$\text{Also } n = \frac{\text{Log. d}}{\text{Log. a} - \text{Log.}(a-b)}.$$

Setzt man $a = 60$, $b = 2$, $d = \frac{4}{3}$, so daß $\frac{a}{d} = 45$; so findet man n etwas Unbedeutendes kleiner als $8\frac{1}{2}$.

IV. Man suche x aus der Gleichung:

$$a^x b = \sqrt[x]{c}.$$

Auflösung.

$$x \text{ Log. } a + \text{Log. } b = \frac{\text{Log. } c}{x}$$

$$x^2 \text{ Log. } a + x . \text{Log. } b = \text{Log. } c$$

$$x^2 + x . \frac{\text{Log. } b}{\text{Log. } a} = \frac{\text{Log. } c}{\text{Log. } a}$$

$$x + \frac{\text{Log. } b}{2 \text{Log. } b} = \pm \sqrt{\frac{\text{Log. } c}{\text{Log. } a} + \left(\frac{\text{Log. } b}{2 \text{Log. } a}\right)^2}$$

$$x = -\frac{\text{Log. } b}{2 \text{Log. } a} \pm \frac{1}{2 \text{Log. } a} \sqrt{4 . \text{Log. } c . \text{Log. } a + (\text{Log. } b)^2}$$

Anmerkung. Einige Aufgaben über Logarithmenrechnung folgen unten §. 265.

Zweiter Artikel.

Bemerkungen über den Gebrauch der kleinern logarithmischen Tafeln der Zahlen 1—10000.

§. 260.

Da die kleinern logarithmischen Tafeln nur die Logarithmen der natürlichen Zahlen von 1—10000 enthalten, und man gleichwohl oft den Logarithmus einer größern Zahl nothwendig hat, so muß für diesen Fall und für ähnliche Fälle eine leichte Verfahrungsart gezeigt werden. Also:

Erster Fall. Den Logarithmus einer Zahl zu finden, welche über 4, aber doch nicht über 8 Ziffern enthält, z. B. von 48'828,125.

Operation. 1) Man betrachte die vier ersten Ziffern als ganze Zahlen, die übrigen vier als Dezimalen: 4382,8125.

2) Man suche die Differenz zwischen dem Logarithmus der so verkürzten ganzen Zahl, und jenem der nächst höhern Zahl.

Log. 4883 = 3,6886867
— Log. 4882 = 3,6885978

d = 0,0000889.

Da nun die Differenzen solcher Zahlen, welche über 1000 gehen, und nur um 1, oder noch weniger unterschieden sind, den

Differenzen ihrer Logarithmen, wenigstens bis zur siebenten Dezimalstelle, ziemlich genau geometrisch proportional sind; so verhält sich 1 (als Differenz der ganzen Zahlen 4882, 4883) zur Differenz der Dezimalzahlen 4882, und 4882, 8125 (0,8125), als wie die Differenz der Logarithmen 0,0000889 zu x, als dem Komplement zum Logarithmus von 4882.

$$1 : 0{,}8125 = 0{,}0000889 : x.$$
$$x = 0{,}00007223125.$$

3) Diesen Werth von x addire man zum Logarithmus der Zahl 4882; so erhält man:

$$\text{Log. } 48'828.125 = 7.6886700.$$

Anmerkung 1. Daß die Kennziffer 7 seyn muß, erhellt daraus, weil die dem Logarithmus entsprechende ganze Zahl 8 Ziffer-stellen hat.

Anmerkung 2. Auch für Dezimalbrüche von mehr als 4 Ziffern läßt sich diese Methode anwenden, wenn man nur in Bestimmung der Charakteristik die nothwendigen Regeln beobachtet; so findet man z. B., daß der Logarithmus von $244{,}140625 = 2.3876400$.

Anmerkung 3. Hat man die größern Tafeln, worin die Logarithmen bis 100.000 berechnet, und überdieß die Proportionaltheile (Partes proportionales) für die sechste, siebente, zum Theil auch achte Zifferstelle enthalten sind, so wird der Logarithmus für eine aus mehr als fünf Ziffern bestehende Zahl, z. B. 27757968, kürzer also gefunden.

a) Man suche den Logarithmus für die fünf ersten Stellen.
$\text{Log. } 27757000 = 7.4433725.$

b) Da nun die bei diesem Logarithmus herrschende Differenz $= 156$ ist, so suche man in der letzten Spalte P. P. die den drei letzten Stellen 968 zugehörigen Proportionaltheile.

Für die sechste Stelle 9 ist der Prop. Th.						140	zehnmillionteste Theile.
= = siebente = =	6	=	=	=	=	9,4	
= = achte = =	8	=	=	=	=	1,25	
					Summe	150,65	

c) Diese

c) Diese Summe addire man als Komplement zum Logarithmus von 27757000, so erhält man:

Log. 27757968 = 7.443387565.

Anmerkung 4. Da in den Tafeln von la Lande die Logarithmen nur mit 5 Dezimalen angegeben sind; so findet man auch nur für fünf- oder höchstens sechszifferige Zahlen den Logarithmus genau. Um für eine solche Zahl den Logarithmus zu finden, multiplizire man mit der Differenz der Tafeln, welche sich in der mit D überschriebenen Kolumne findet, die fünfte (und sechste) Ziffer, schneide die letzte Ziffer (oder 2 letzten Ziffern) vom Produkte ab, und addire diese Zahl zur Mantisse, welche den vier ersten Ziffern entspricht.

Z. B. Es sey Log. 36547 zu finden.

Es ist Log. 3654 = 3,56277, Differenz 12
also 0,7.12 = 8,4
Log. 36547 = 4,56284.

Sollte der Logarithmus von einer mehrzifferigen Zahl gesucht werden; so müßte man die Charakteristik nach der ganzen Zahl, die Mantisse nach den ersten 5 oder 6 Ziffern bestimmen; die folgenden Ziffern haben auf die Mantisse (mit 5 Dezimalen) keinen Einfluß mehr.

§. 261.

Zweiter Fall. Die Zahl zu finden, die einem Logarithmus zugehört, dessen Kennziffer größer als 3 ist, dessen Mantisse aber genau in den kleinern Tafeln vorkommt; z. B. die dem Logarithmus 7.5364322 zugehörige Zahl zu finden.

Operation. Man suche den gegebenen Logarithmus unter der höchsten Kennziffer 3. Da nun, nach der Voraussetzung, die Mantisse genau vorkommt, so hat man nur die der Charakteristik 7 entsprechenden 8 Zifferstellen in der Zahl 3439 durch vier Nullen zu suppliren; also

7.5364322 = Log. 34390000.

Dritter Fall. Eine Zahl zu finden, die einem Logarithmus zugehört, dessen Kennziffer zwar klei-

ner als 3 ist, dessen Mantisse aber nicht genau in den Tafeln vorkommt.

Operation. Man habe z. B. den Logarithmus 1.8976821. Man suche ihn unter der Kennziffer 3, so findet man die ganze Mantisse bei 7901; da aber der Kennziffer 1 nur Zehner zukommen; so ist

$$1.8976821 = \text{Log. } 79{,}01.$$

Findet man aber die Mantisse auch unter der höhern Kennziffer nicht genau, und wünscht gleichwohl, die dem Logarithmus entsprechende Zahl in mehrern Ziffern zu haben; so verfährt man also:

1) Um z. B. die dem Logarithmus 1.2480160 zugehörige Zahl genau zu finden, schlage man diesen Logarithmus (B) unter der Kennziffer 3 auf, und bemerke den nächst kleinern Logarithmus (A), und den nächst größern (C), zwischen welche B hineinfällt.

In gegenwärtigem Beispiele ist $A = 3.2479733$, $C = 3.2482186$.

2) Nun ziehe man A sowohl von B, als von C ab.

$$B - A = d.$$
$$C - A = \delta.$$

3) Formirt man nun die geometrische Proportion

$$\delta : d = 1 : x,$$

so ist x das Komplement, welches zu der — dem Logarithmus A — entsprechenden Zahl (a) addirt, die Zahl (b) gibt, welche dem Logarithmus B zukommt.

$B = (3)2480160$	$C = 3.2432186$
$-A = 3.2479733$	$A = 3.2479733$
$d = 0.0000427$	$d = 0.0002453$

$0{,}0002453 : 0{,}0000427 = 1 : x \;.\; x = 0{,}1740$

$a = 1770$

$+x = 0{,}1740 \;.\; b = 1770{,}174$

$\text{Log. } 1770{,}1740 = 3.2480160$

und folglich $\text{Log. } 17{,}701740 = 1.2480160$.

Anmerkung 1. Die nämliche Methode ließe sich auch anwenden, wenn der gegebene Logarithmus B zur Charakteristik 4, 5, 6 hätte.

Anmerkung 2. Hat man die größern logarithmischen Tafeln, so läßt sich eine Aufgabe über diesen dritten Fall leichter auf folgende Art lösen; z. B. um die dem Logarithmus 0.4883313 zugehörige Zahl zu finden, suche man (unter der Kennziffer 3) den ihm am nächsten kommenden kleinern Logarithmus:

0.4883251 = Log. 3,0784.

Nun bestimme man die Differenz beider Logarithmen.

D = 62.

Davon ziehe man aus der Spalte P. P. den größten Proportionstheil ab, der sich abziehen läßt, und schreibe die ihm zugehörige Zahl als 6te Zifferstelle an.

62 |
−56 | Zahl 0,00004.
6

Zum Reste 6 füge man eine Nulle, und subtrahire ebenfalls den größten Proportionaltheil, der sich subtrahiren läßt. Die ihm zugehörige Zahl gibt die 7te Zifferstelle.

60 |
−56 | Zahl 0,000004
folglich 0.4884251 = Log. 3.078444
= Log. des Métre im Fußmaße.

* Sollte die gefundene Differenz kleiner seyn, als der zu 1 gehörige Proportionaltheil, so müßte man an die ihr zugehörige Stelle eine Nulle setzen.

Anmerkung 3. Nach den Tafeln von la Lande findet man die fünfte, sechste Ziffer der einem gegebenen Logarithmus entsprechenden Zahl, wenn man die Differenz zwischen dem gegebenen und nächst kleineren Logarithmus durch den zehnten Theil der Tafeldifferenz dividirt.

Z. B. 4,37854 = Log. x
3,37840 = Log. 2390, die Differenz der Tafeln 18
14 : 1,8 = 7,7
x = 23907,7.

Vierter Fall. Für einen negativen Logarithmus, z. B. für — 1,0791812, den ihm entsprechenden Bruch zu finden.

Operation. Man betrachte den Logarithmus als positiv, suche die ihm entsprechende Zahl, und mache sie zum Nenner einer Fraktion, deren Zähler 1 ist:

$$+ 1{,}0791812 = \text{Log. } 12$$
$$- 1{,}0791812 = \text{Log. } \tfrac{1}{12}.$$

Will man aber lieber den Werth des negativen Logarithmus in einem Dezimalbruche haben, so betrachte man ihn als positiv, und ziehe ihn von der Summe seiner Kennziffer (n) und der Zahl 4 ab (vorausgesetzt, daß man nur die kleinern Tafeln besitze). Der durch die Subtraktion entstehende Logarithmus entspricht dem verlangten Dezimalbruche, und ist übrigens nach §. 254. II. zu behandeln.

Obiges Beispiel ist also auch so aufzulösen:

$$n = 1;\ \text{also } n + 4 = 5.$$

5.0000000
1.0791812

3.9298188 — 5 = Log. 8333 ($\times 0{,}10^{-5}$)
= Log. 0,0833 ...

Es ist aber $\frac{1}{12} = 0{,}08333\ldots$

Dritter Artikel.

Bemerkungen über die natürlichen Logarithmen und die dekadische Ergänzung, und einige Aufgaben über Logarithmenrechnung.

§. 262.

Durch Funktionen wird gefunden, daß in jedem Logarithmensysteme für jeden Werth von x

$$\text{Log. } (1+x) = A\left(x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \ldots\ldots\right)$$

sey. In dieser Formel drückt A zunächst eine unbestimmte Größe aus: je nachdem man dem A beliebig einen Werth beilegt, erhält man für die nämliche Zahl, z. B. $3 = 1 + x = 1 + 2$ eine andere bestimmte Zahl als Logarithmus. In jedem Logarithmen-

syſteme hat A einen daſſelbe beſtimmenden Werth, und heißt daher Modul des Logarithmenſyſtemes. Da es am natürlichſten iſt, den Modul A = 1 zu ſetzen, ſo heißen jene Logarithmen, deren Modul = 1 iſt, die natürlichen, aus geometriſchen Gründen auch hyperboliſchen Logarithmen (logarithmi naturales s. hyperbolici) im Gegenſatze der übrigen, welche man künſtliche (log. artificiales) heißt. Die natürlichen Logarithmen bezeichnet man mit log. nat., die briggiſchen, welche man auch die gemeinen heißt, mit log. vulg. oder auch mit log. ohne Beiſatz.

Durch eine der obigen ähnliche Reihe findet man auch die einem gegebenen natürlichen Logarithmus entſprechende Zahl. Nimmt man 1 als natürlichen Logarithmus, ſo findet man dafür nach jener Reihe als entſprechende Zahl 2,7182818; d. i. $B^1 = 2{,}7182818$ (§. 251), oder $B = 2{,}7182818$. Alſo iſt dieſe Zahl die Baſis der natürlichen Logarithmen; man bezeichnet ſie gewöhnlich mit e.

§. 263.

Da die oben für $\log(1+x)$ angegebene Reihe zu jedem Syſteme gehört, ſo wird auch:

$$\log \text{vulg}\,(1+x) = A\left(x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots\right).$$

Es iſt $\log.\text{nat.}\,(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots\ldots$

mithin $A.\log.\text{nat.}\,(1+x) = \log.\text{vulg.}\,(1+x)$ ..... (α

Setzt man $x = 9$, ſo iſt $\log.\text{vulg.}\,(1+x) = \log.\text{vulg.}\,10 = 1$.

Log. nat. 10 iſt aber = 2,3025850, mithin

$$A.2{,}3025850 = 1, \text{ woraus}$$

$$A = \frac{1}{2{,}3025850} = 0{,}43429449$$

der Modul des briggiſchen Logarithmenſyſtemes.

Mit dieſer Zahl muß man nach Gleichung α die natürlichen Logarithmen multipliziren, um ſie in gemeine zu verwandeln. Um gemeine Logarithmen in natürliche zu verwandeln, muß man jene mit 2,3025880 multipliziren, da

$$\log.\text{nat.}\,(1+x) = \frac{\log.\text{vulg.}\,(1+x)}{A} = \frac{\log.\text{vulg.}\,(1+x)}{\frac{1}{2{,}3025850}}$$

$$= \log.\text{vulg.}\,(1+x) \times 2{,}3025850.$$

Zusatz. Bei solchen Verwandlungen wird die abgekürzte Multiplikation (I. Th. §. 70.) mit Vortheil angewendet. Noch mehr erleichtert wird die Rechnung durch folgendes Täfelein, worin die Multipla der genannten beiden Zahlen enthalten sind.

9	20.7232658	3,90865041	9
8	18.4206807	3,47435592	8
7	16.1180957	3,04006143	7
6	13.8155106	2,60576694	6
5	11.5129255	2,17147245	5
4	9.2103404	1,73717796	4
3	6.9077553	1,30288347	3
2	4.6051702	0,86858898	2
1 =	2.3025851	0,43429449	1 =
Faches.	von	von	Faches

Aufgaben. 1) Den briggischen Logarithmus von 3,14159 (= π), d. i. 0,4971498, in den natürlichen —

2) den Log. nat. 5 = 1,6094379 in den briggischen zu verwandeln.

Auflösungen.

1) Log.vul.π. × f = Log. nat. π.

2,3025851	
0,4971498	
92103404	
20723266	
1611810	
23026	
9210	
2072	
184	
1,14472972	= Log. nat. π.

2) Log. nat. 5 × A = Log. vulg. 5.

0,43429449	
1,6094379	
43429449	
26057669	
390865	
17372	
1303	
304	
39	
0,69897001	= Log. vulg. 5.

§. 264.

Am Schlusse der Lehre von den Logarithmen Etwas von der dekadischen Ergänzung.

Erklärung. Eine Zahl (C), welche mit einer gegebenen (N) die nächsthöhere Einheit, (d. i. die nächste runde Zahl 10, 100, 1000 u. s. w., also die nächsthöhere Würde von 10 oder

$\delta^n = D$) zur Summe gibt, heißt die dekadische Ergänzung oder das arithmetische Komplement.

Z. B. Wenn $N = 72$, so ist die dekadische Ergänzung $C = 28$; denn $72 + 28 = 100$; folglich $D = 100$.

Zusatz 1. Die nächsthöhere Einheit von der gegebenen Zahl N ist immer eine Würde von 10, welche zur höchsten Ziffer 1, und nach ihr so viele Nullen, als die Zahl N Zifferstellen, hat. Also wenn $N = 330.789$ ist; so wird

$$D = 1'000.000.$$

Zusatz 2. Man findet zur gegebenen Zahl N ihre dekadische Ergänzung C, wenn man die Zahl N von ihrer nächsthöhern Einheit D subtrahirt; denn

$$\begin{array}{rcl} N + C & = & D \\ N & = & N \\ \hline C & = & D - N. \end{array}$$

Also im obigen Falle ist $C = 1'000.000 - 340.789 = 659.211$.

Zusatz 3. Man hat nicht nothwendig, die Zahl D immer anzuschreiben; sondern es läßt sich die dekadische Ergänzung C leicht berechnen, wenn man die niedrigste Zifferstelle (also die Einerstelle) der Ziffer N von 10, alle übrigen höhern von 9 abzieht; denn

$$\begin{array}{rcl} \text{z. B. } D & = & 1'000.000 = 999.990 + 10 \\ N & = & 340.789 = 340.780 + 9 \\ \hline D - N = C \ldots\ldots & = & 659.211. \end{array}$$

Lehrsatz. Von einer Zahl A wird eine andere N subtrahirt, wenn man zu der Zahl A die dekadische Ergänzung (C) von N addirt, und von der Summe die nächsthöhere Einheit D abzieht; d. h. $A - N = (A + C) - D$.

Beweis. $N + C = D$; folglich $N = D - C$

$$\begin{aligned} A - N &= A - (D - C) = A - D + C \\ &= (A + C) - D. \end{aligned}$$

Anmerkung. Diese Methode ist zwar auch bei der Subtraktion ganzer Zahlen anwendbar; sie wird aber vorzüglich bei der Subtraktion der Dezimalen, namentlich der Logarithmen,

angewendet, indem die Addition schneller verrichtet wird, als die Subtraktion.

Beispiel. 1) 397.608 — 289.479.

Auflösung. 1) $\left.\begin{array}{rl} A = & 397.608 \\ -N = & -289.479 \end{array}\right\} = (A+C) - D$

$$\begin{array}{rl} = A = & 397.608 \\ +C = & 710.521 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rl} A+C = & 1'108.129 \\ -D = & 1'000.000 \end{array}\right\} = 108.129.$$

§. 265.

Aufgaben.

1) Man verwandle den Bruch $\frac{1526}{16837}$ in einen Dezimalbruch.

Auflösung. $\text{Log.}\left(\frac{1526}{16837}\right) = \text{Log. } 1526 - \text{Log. } 16827$

$$\begin{array}{rl} \text{Log. } 1526 = & \overset{+2}{3},18355^{-2} \\ \text{Log. } 16837 = & 4,22626 \end{array}$$

$$\text{Log.}\left(\frac{1526}{16837}\right) = 0,95729 - 2$$

$$\frac{1526}{16837} = 0,090634$$

* $\text{Log.}\left(\frac{1526}{0,016837}\right)$ wird in ähnlicher Art bestimmt:

$$\begin{array}{rl} \text{Log. } 1526 = & 3,18355 \\ \text{Log. } 0,016837 = & 0,22626 - 2 \\ & - \qquad + \end{array}$$

$$4,95729 = \text{log. } 90634$$

2) Man ziehe die Kubikwurzel aus 0,0561.

Auflösung. $\text{Log. } \sqrt[3]{0,0561} = \frac{\text{Log. } 0,0561}{3}$

$$= \frac{0,74896 - 2}{3}$$

Damit die angehängte negative Zahl durch 3 dividirt werden kann, muß zu ihr noch —1 gezählt, dagegen zur Charakteristik 0 auch +1 addirt werden. Daher

$$\text{Log. } \sqrt[3]{0{,}0561} = \frac{1{,}74896 - 3}{3} = 0{,}58299 - 1$$

$$\sqrt[3]{0{,}0561} = 0{,}382816.$$

3) Wie viele bayerische Eimer machen 140 würtemberger Eimer, da 1 bayer. Eimer = 641,418 Decilitres, 1 würtemb. Eimer = 2939,23 Decil. ist?

b. E. w. E.
1 : 1 = 641, 418 : 2939,27
2939,27 b. E. = 641,418 w. E.
w. w. b. b.
641,418 : 140 = 2939,27 : x

$$x = \frac{140.2937{,}27}{641{,}418}$$

Log. x = Log. 140 + Log. 2937,27 + C. log. 641,418 — D*

* Hier bezeichnet nach §. 264 C die dekadische Ergänzung, D die nächsthöhere Einheit vom Logarithmus von 641,418.

Log. 140 = 2,14613
Log. 2937,27 = 3,46831
C. Log. 641,418 — D = 7,19275 — 10

Log. x = 12,80719 — 10 = 2,80719
x = 641,485.

4) Der bayerische Visireimer hält 2752 bayer. Dezimalkubikzolle; wieviel beträgt dieß französische Duodezimalkubikzolle?

Auflösung.

fr. Ddz. x	2752 b. Dz. Kbz.
Dzkz. 1000	1728 Ddzkz.
$(324{,}839)^3$	$(291{,}859)^3$. Vgl. I. Th. §. 114. II. u. Taf. Abth. II.

$$x = \frac{2752 . 1728 . (291{,}859)^3}{1000 . (324{,}839)^3}$$

Log. x = Log. 2752 + Log. 1728 + 3 Log. 291,859 — (Log. 1000 + 3 Log. 324,839)

Log. 2752 = 3,4396484
Log. 1728 = 3,2375437
3. Log. 291,859 = 7,3955196
C. Log. des Nenners — D = 89,4649954 — 100

Log. x = 3,5377071
x = 3449,11 franz. Ddzkz.

5) Man löse die Gleichung:

$$\sqrt[x]{64} - 8\sqrt[2x]{64} = 12.$$

Operation.

$$7 \cdot 64^{\frac{1}{x}} - 8 \cdot 64^{\frac{1}{2x}} = 12.$$

Setzt man $64^{\frac{1}{2x}} = y$, so ist $(64^{\frac{1}{2x}})^2 = 64^{\frac{1}{x}} = y^2$;

daher $7y^2 - 8y = 12$

$$y^2 - \frac{8}{7}y + \frac{16}{49} = \frac{12}{7} + \frac{16}{49}$$

$$y - \frac{4}{7} = \pm\frac{10}{7}$$

$$y = 2 \text{ oder } = -\frac{6}{7}.$$

Substituirt man $y = 2$ in $64^{\frac{1}{2x}} = y$, so ist

$$64^{\frac{1}{2x}} = 2$$
$$64 = 2^{2x}$$
$$\log. 64 = 2x \cdot \log. 2$$
$$x = \frac{\log. 64}{2\log. 2} = \frac{1{,}80618}{0{,}60206} = 3.$$

Es kann $64^{\frac{1}{2x}} = -\frac{6}{7}$ nicht gesetzt werden, weil der Logarithmus aus einer negativen Zahl bestimmt werden müßte; negative Zahlen aber als solche keinen Logarithmus haben. Der zweite Werth von x ist daher imaginär.

Vierter Artikel.

Anwendung der Lehre von den Logarithmen auf Zinszinsen-, Zieler-, Interusuriums- und Renten-Rechnungen.

I. Zinszinsen- und Rentenrechnungen.

§. 266.

Erklärungen.

1) **Kapital** heißt im Allgemeinen eine Summe Geldes, welche einem Andern zur Benutzung auf eine bestimmte Zeit überlassen wird.

2) Zins oder Interesse nennt man das Geld, welches für die Benutzung eines fremden Kapitals nach einer festgesetzten Zeit, gewöhnlich nach Verlauf eines Jahres, bezahlt wird. — Man unterscheidet aber einfache und zusammengesetzte oder Zins-Zinsen.

a) Einfache Zinsen heißen diejenigen, welche jährlich abgetragen, oder einige Jahre hindurch, ohne sie als Kapital zu nutzen, bloß gesammelt werden.

b) Zusammengesetzte oder Zins-Zinsen sind diejenigen, welche jährlich zum Kapital geschlagen, und zugleich mit ihm verzinst werden.

Es sind Zinszinsen in der Regel nicht erlaubt; aber die Entscheidung, über Rechtmäßigkeit oder Unrechtmäßigkeit gehört nicht der Arithmetik zu; übrigens fordert das wissenschaftliche Interesse, zu zeigen, wie beiderlei Zinsen, mit oder ohne Kapital, mathematisch bestimmt werden können.

§. 267.

I. Wenn man den Zins von 100 (c) fl. in einem Jahre $= p$, das Kapital $= K$, die Anzahl der Jahre $= t$ setzt; so sind die innerhalb der Zeit t fallenden Zinsen (F):

$$F = \frac{Ktp}{c}.$$

II. Die Summe des Kapitals und der einfachen Zinsen zu p Prozent wird nach t Jahren seyn:

$$S = K + F = K + \frac{Ktp}{c} = \left(\frac{c + tp}{c}\right) K.$$

Setzt man $t = 1$, so ist $S = \left(\frac{c + p}{c}\right) K$.

* Die Zeit (t), innerhalb welcher die einfachen Zinsen dem Kapitale gleich werden, ist $= \frac{100}{p}$ (wo p wieder das Prozent bedeutet).

** Das Prozent, zu dem ein gegebenes Kapital ausliegen muß, damit die Zinsen innerhalb der Zeit t dem Kapitale gleich werden, ist $= \frac{100}{t}$, wobei aber die Zeit t die Anzahl der Jahre

ausdrückt, folglich jederzeit in Theilen des Jahres bestimmt werden muß.

III. Wenn ein Kapital K so auf Zinsen ausgelegt wird, daß die jährlichen Zinsen, p vom Hundert, immer zum Kapital geschlagen und verzinset werden; so ist der Werth des Kapitals und der Zinsen (S):

1) nach Verlauf des ersten Jahres $= K\left(\frac{c+p}{c}\right)$

2) — — — zweiten —, $= K\left(\frac{c+p}{c}\right)^2$

3) — — — dritten — $= K\left(\frac{c+p}{c}\right)^3$

3) überhaupt nach n Jahren . . . . . $K\left(\frac{c+p}{c}\right)^n$

Beweis. 1) Im ersten Jahre wird verzinset das Kapital K. Davon ist der Zins: $\frac{K \times p}{c}$; mithin Kapital und Zins $= K\left(\frac{c+p}{c}\right)$. (Vergl. I.) Diese Summe sey $= \alpha$.

2) Im zweiten Jahre ist zu verzinsen α; davon sind die Zinsen $\frac{\alpha \times p}{c}$; folglich Zins und Kapital $= \alpha + \frac{\alpha p}{c}$

$$= \frac{\alpha c + \alpha p}{c} = \alpha\left(\frac{c+p}{c}\right) = \beta.$$

Da aber $\alpha = K\left(\frac{c+p}{c}\right)$, so wird $\beta = K\left(\frac{c+p}{c}\right)^2$.

3) Im dritten Jahre ist zu verzinsen β. Davon ist der Zins $\frac{\beta p}{c}$, folglich Zins und Kapital $\beta\left(\frac{c+p}{c}\right) = K\left(\frac{c+p}{c}\right)^3$.

Nach Verlauf von drei Jahren ist also das Kapital angewachsen auf $K\left(\frac{c+p}{c}\right)^3 = \gamma$.

Nach Verlauf von vier Jahren wird es $K\left(\frac{c+p}{c}\right)^4 = \delta$; folglich nach Verlauf von n Jahren $K\left(\frac{c+p}{c}\right)^n = S$.

Anmerkung. Aus dem nämlichen Grunde ist der Werth des Kapitals K nach einem halben Jahre

$$= K\left(\frac{c+p}{c}\right)^{\frac{1}{2}} = K\sqrt{\left(\frac{c+p}{c}\right)},$$

$$\text{nach } \tfrac{1}{4} \text{ Jahre} = K\left(\frac{c+p}{c}\right)^{\frac{1}{4}},$$

$$\text{nach einem Monat} = K\left(\frac{c+p}{c}\right)^{\frac{1}{12}}.$$

Die Auflösung geschieht am leichtesten durch die Logarithmen.

§. 268.

In der Formel $S = K\left(\frac{c+p}{c}\right)^n$ kann jede der vier Größen S, K, p, n die unbekannte seyn.

I. Ist K unbekannt, und also S gegeben, so erhält man:

$$K = S : \left(\frac{c+p}{c}\right)^n.$$

II. Ist p unbekannt, so ergibt sich die Formel:

$$p = c \times \left(-1 + \sqrt[n]{\frac{S}{K}}\right);$$

denn $\left(\frac{c+p}{c}\right)^n = \frac{S}{K}$

$$\frac{c+p}{c} = \sqrt[n]{\frac{S}{K}}$$

$$c + p = c\sqrt[n]{\frac{S}{K}}$$

$$p = -c + c\sqrt[n]{\frac{S}{K}}$$

$$p = c \times \left(-1 + \sqrt[n]{\frac{S}{K}}\right).$$

Wenn die Wurzel den dritten Grad übersteigt, und mit Logarithmen gerechnet werden muß, so ist vermöge der Gleichung

$$\left(\frac{c+p}{c}\right)^n = \frac{S}{K}$$

$$\text{Log. } (c+p) = \frac{\text{Log. } S - \text{Log. } K}{n} + \text{Log. } c.$$

Aus Log. $(c+p)$ wird die entsprechende Zahl $c+p$, und weil c bekannt ist, hieraus p gesucht. Nennt man die Wurzel aus $\frac{S}{K} = R$, so ist: $p = cR - c = c[R-1]$.

III. Ist endlich n unbekannt, so erhält man durch Logarithmisirung

$$n \times \text{Log.}\left(\frac{c+p}{c}\right) = \text{Log. S} - \text{Log. K.}$$

$$n = \frac{\text{Log. S} - \text{Log. K}}{\text{Log.}\left(\frac{c+p}{c}\right)}.$$

§. 269.

Aufgaben.

I. Welches ist der Werth eines Kapitals von 10.000 fl. zu 4 Prozent nach 10 Jahren, wenn jährlich die Zinsen zum Kapital geschlagen, und wieder verzinset werden?

Auflösung.

$$S = K\left(\frac{c+p}{c}\right)^n = \text{Log. K} + n\,\text{Log.}\left(\frac{c+p}{c}\right) =$$

$$\text{Log. S} = \text{Log. } 10.000 + 10 \text{ Log. } 1{,}04^*$$

$$\text{Log. S} = 4.1703330 = \text{Log. } 14802{,}442 \text{ fl.}$$

Also S der Werth des Kapitals nach 10 Jahren
= 14802 fl. 26 kr. 2 pf. 1 hl.

* 1,04 ist entstanden aus $\frac{100+4}{100} = \frac{104}{100}$.

II. Welches Kapital beträgt, mit Einschluß seiner sechsjährigen Zinszinsen, 5 vom Hundert, 10720 fl. 45 kr. 7,26 hl.?

Auflösung. $S = \frac{5145967{,}26}{480{,}00}$ fl.

$$\text{Log. K} = \text{Log. S} - 6 \text{ Log. } 1{,}05 = 4.0302258 - 0.1271358$$

$$\text{Log. K} = 3.9030900 = \text{Log. } 8000.$$

Also ein Kapital von 8000 fl.

III. Zu wie viel Prozent muß ein Kapital von 5000 fl. verzinszinset werden, daß der Werth desselben in 20 Jahren 12058,572 fl. werde?

Auflösung.

$$\text{Log. } (100+x) = \text{Log. } \frac{12058{,}572 - \text{Log. } 5000}{20} + \text{Log. } 100$$

$$\text{Log. } (100+x) = \frac{4.0812960 - 3.6989700}{20} + 2.00\ldots$$

$$\text{Log. } (100+x) = 2.0191163 = \text{Log. } 104{,}5.$$

$x = 4\frac{1}{2}$; also zu $4\frac{1}{2}$ Prozent.

IV. Wie viele Jahre müssen vergehen, bis die 5 prozentigen Zinszinsen dem Kapitale gleich werden?

Auflösung. Man nehme ein beliebiges Kapital, z. B. 1000 fl., so werden Kapital und Zinszinsen = 2000 fl. = S.

$$x = \frac{\text{Log. S} - \text{Log. K}}{\text{Log.}\left[\frac{c+p}{c}\right]} = \frac{0.3010300}{0.0211893} = 14{,}2 \text{ Jahre.}$$

V. Die Menschenzahl eines gewissen Landes ist nach einem verheerenden Kriege 400.000. Nun weiß man aus Erfahrung, daß die jährliche Vermehrung 3 auf das Hundert betrage; wie stark wird die Volkszahl nach 8 Jahren seyn?

Auflösung. Beinahe 506.708.

VI. Ein Waldung verbessert sich, angestellten Versuchen zu Folge, jährlich mit drei Klaftern Prozent. Nun wird sie gegenwärtig auf 10.000 Klafter geschätzt. Wie viele Klafter wird sie nach 5 Jahren abwerfen, vorausgesetzt, daß sie diese Zeit hindurch geschont werde?

Auflösung. 11592,74 Klafter

§. 270.

Die allgemeine Formel für die Summe des Kapitals und der Zinszinsen nach n Jahren: $K\left(\frac{c+p}{c}\right)^n$ läßt sich nach dem Binomium auch so darstellen:

$$S = K \times \left(1 + \frac{p}{c}\right)^n = K\left(1 + \frac{n.p}{c} + \frac{n.n-1.p^2}{1.2.c^2} + \frac{n.n-1.n-2.p^3}{1.2.3.c^3} + \ldots\ldots + \frac{n.n-1\ldots\times n-(n-1).p^n}{1.2\ldots n-1.n.c^n}\right).$$

Hieraus leitet sich folgende einfache Methode ab, den Werth eines Kapitals, z. B. von 200,000 fl, nach Verlauf mehrerer Jahre, z. B. 10, zu finden. Man schreibe alle Jahre, von dem letzten angefangen, der Reihe nach rückwärts an,

10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1;

multiplizire die Reihe mit dem Prozente, z. B. hier 4, und schreibe unter die Produkte der Reihe nach die Nenner 100, 200, 300..... n×100; d. i.

$\frac{40}{100}$, $\frac{36}{200}$, $\frac{32}{300}$, $\frac{28}{400}$, $\frac{24}{500}$ $\frac{20}{600}$ $\frac{16}{700}$ $\frac{12}{800}$ $\frac{8}{900}$ $\frac{4}{1000}$.

Nun multiplizire man mit dem Kapital 200000 den ersten Bruch $\frac{40}{100}$. Produkt 80.000. Damit multiplizire man die zweite Fraktion, mit dem Produkte die dritte, und so mit dem zuletzt gefundenen Produkte die nächste Fraktion, und dieß so lange, bis das Produkt nicht mehr den tausendsten Theil eines Gulden beträgt. Die einzelnen Produkte werden nun zum Kapitale addirt. Die Summe gibt den Werth des Kapitals mit den Zinsen nach 10 Jahren.

Operation. Kapital 200.000 fl.

Zins	80.000
Zzins . .	14.400
Zzzins . .	1.536
Zzzzins . . .	107, 52
Zzzzzins	5, 16096
Zzzzzzins	0, 172032
Zzzzzzzins	0, 0039216
Summe =	296.048, 857 fl.

Anmerkung 1) Will man bloß die Summe der 10jährigen Zinszinsen haben, so darf man nur das Kapital nicht als Summand anschreiben.

2) Bei Berechnung der Zinszinsen für kleinere Kapitalien kann man den größten Theil der letzten Fraktionen hinweglassen, weil nur die ersten zur Bestimmung des Facit's wesentlich beitragen.

§. 271.

I. Ist die Anzahl der Jahre durch keine ganze, sondern eine gemischte Zahl, z. B. $n = m + \frac{1}{q}$ ausgedrückt, so kann die Formel $S = K\left(\frac{c+p}{c}\right)^n$ nicht unmittelbar angewendet werden. Denn nach m Jahren ist $S' = K\left(\frac{c+p}{c}\right)^m$, und dieses S', als zu verzinsendes Kapital betrachtet, würde in einem Jahre $\frac{p}{c}.S' = \frac{p}{c}.K\left(\frac{c+p}{c}\right)^m$ Zinsen tragen, im $\frac{1}{q}$ Jahre $\frac{p}{c.q}.\ K.\left(\frac{c+p}{c}\right)^m$. Das Kapital wird daher sammt Zinszinsen in $m + \frac{1}{q}$ Jahren seyn:

$$K\left(\frac{c+p}{c}\right)^m + \frac{p}{c.q}.K.\left(\frac{c+p}{c}\right)^m = K\left(\frac{c+p}{c}\right)^m\left(1 + \frac{p}{cq}\right),$$

ein Ausdruck, welcher von

$S = K$

$$S = K\left(\frac{c+p}{c}\right)^{m+\frac{1}{q}} = K\left(\frac{c+p}{c}\right)^{m}\left(\frac{c+p}{c}\right)^{\frac{1}{q}}$$

unterschieden ist, zumal wenn K oder m eine große Zahl ausdrückt.

II. Wollte man am Ende eines jeden halben Jahres die Interessen wieder zum Kapital schlagen, so würde das Anwachsen des Kapitals beträchtlicher seyn, und eben so viel ausmachen, als wenn das Kapital zu halb so viel Prozent, aber auf noch so viele Jahre ausgeliehen würde. Demnach ist dann

$$S = K\left(\frac{c+\frac{1}{2}p}{c}\right)^{2n}$$

Eben so bei vierteljähriger Verzinsung:

$$S = K\left(\frac{c+\frac{1}{4}p}{c}\right)^{4n}$$

Aufgaben.

I. Wie groß wird ein $7\frac{1}{2}$ Jahre lang zu $4\frac{1}{2}$ p. c. auf Zinszinsen ausgeliehenes Kapital von 20000 fl. seyn?

$$S = 20000\left(1+\frac{4,5}{100.2}\right)\left(\frac{100+4,5}{100}\right)^{7} = 20000.1,0225.1,045^{7}.$$

$$\begin{aligned} \text{Log. } 20000 &= 4,30125 \\ \text{Log. } 1,0225 &= 0,00966 \\ 7\,\text{Log. } 1,045 &= 0,13384 \\ \hline \text{Log. } S &= 4,44475, \quad S = 27848 \text{ fl.} \end{aligned}$$

II. Wie groß wird ein Kapital von 10000 fl. nach 5 Jahren seyn, wenn es zu $4\frac{1}{3}$ p. c. ausgeliehen wird, und wenn die Zinsen alle halbe Jahre zum Kapitale geschlagen werden?

$$S = 10000\left(\frac{100+2,1666}{100}\right)^{10}$$

$$\text{Log. } S = \text{Log. } 10000 + 10\,\text{Log. } 1,021666 = 4 + 0,09307$$

$$S = 12390.$$

§. 272.

Wenn man zu dem Kapitale außer den jährlichen Zinsen auch noch eine neue Summe A schlägt, und auch diese mit verzinset, so wächst nach §. 267. das Kapital K also an:

Nach 1 Jahr: $K\left[\frac{c+p}{c}\right]+A.$

— 2 Jahren: $K\left[\frac{c+p}{c}\right]^2+A\left[\frac{c+p}{c}\right]^1+A.$

— 3 Jahren: $K\left[\frac{c+p}{c}\right]^3+A\left[\frac{c+p}{c}\right]^2+A\left[\frac{c+p}{c}\right]^1+A$

— 4 Jahren: $K\left[\frac{c+p}{c}\right]^4+A\left[\frac{c+p}{c}\right]^5+A\left[\frac{c+p}{c}\right]^2+$
$A\left[\frac{c+p}{c}\right]^3+A.$

— n Jahren: $K\left[\frac{c+p}{c}\right]^n+A\left[\frac{c+p}{c}\right]^{n-1}+A\left[\frac{c+p}{c}\right]^{n-2}$
$+\ldots.+A\left[\frac{c+p}{c}\right]^1+A=\Sigma.$

Diese Reihe besteht aus zwei Theilen, wovon der eine $K\left(\frac{c+p}{c}\right)^n$, der andere aber, rückwärts geschrieben, die geometrische Progression ist:

$$A+A\left[\frac{c+p}{c}\right]^1+A\left[\frac{c+p}{c}\right]^2+A\left[\frac{c+p}{c}\right]^3+\ldots..+$$
$$A\left[\frac{c+p}{c}\right]^{n-1}.$$ Davon ist die Summe

$$=\left[A\left(\frac{c+p}{c}\right)^n-A\right]:\left[\frac{c+p}{c}-1\right]=\frac{cA\times\left[\frac{c+p}{c}\right]^n-cA}{p}$$

Dazu den ersten Theil addirt, gibt zur ganzen Summe obiger Reihe:

$$\Sigma=\left[\frac{pK+cA}{p}\right]\times\left[\frac{c+p}{c}\right]^n-\frac{cA}{p}.$$

Der erste Theil dieser Formel muß logarithmisch berechnet werden, und ist

$$=\text{Log.}\left[\frac{pK+cA}{p}\right]+n.\text{Log.}\left[\frac{c+p}{c}\right].$$

§. 273.

Wenn man aber, anstatt zum Kapitale, das auf Zinszinsen liegt, jährlich eine Summe zu legen, jährlich eine Summe B

hinwegnimmt: so vermindert sich das Kapital in dem nämlichen Verhältnisse, als es vorhin (§. praec.) angewachsen ist; nämlich nach n Jahren wird die Summe s.

$$s = K\left[\frac{c+p}{c}\right]^n - B\left[\frac{c+p}{c}\right]^{n-1} - B\left[\frac{c+p}{c}\right]^{n-2} -$$
$$B\left[\frac{c+p}{c}\right]^{n-s} - \ldots\ldots - B\left[\frac{c+p}{c}\right]^1 - B.$$

$$s = \left[\frac{pK-cB}{p}\right] \times \left[\frac{c+p}{c}\right]^n + \frac{cB}{p}.$$

Wenn nun $\frac{cB}{p} > K$ ist, so muß das Kapital immer kleiner werden, und zuletzt ganz verschwinden.

Aufgaben. I. Jemand legt 1200 fl. auf Zinszinsen zu $4\frac{1}{2}$ Prozent; zugleich vermehrt er das Kapital selbst jährlich um 100 fl. Wie groß wird dieses nach Verlauf von 10 Jahren seyn?

Auflösung. $\Sigma = \frac{15400}{45} \times \left(\frac{104,5}{100}\right)^{10} - 2222,2$

$$\text{Log. } \Sigma = 3.5343082 + 0.1911630 = 3.7254712$$
$$= \text{Log. } 5314,6$$
$$\text{und } 5314,6 - 2222,2 = 3092,4 \text{ fl.}$$

II. Ein Edelmann hat 40.000 fl. zu 5 Prozent anliegend. Da ihm aber die Interessen nicht zureichen, so zieht er vom Kapital selbst jährlich 2500 fl. ab. Wann wird das Kapital rein aufgezehrt seyn?

Auflösung.

Hier ist $s = 0$, $K = 40.000$, $B = 2500$, $p = 5$.

Daher $10000 \times (\frac{21}{20})^n = 50,000$; folglich $(\frac{21}{20})^n = 5$.

$$n = \frac{\text{Log. } 5}{\text{Log. } \frac{21}{20}} = \frac{0.6989700}{0.0211893} = 32,9 \text{ Jahre.}$$

Also in 32,9 Jahren.

§. 274.

Wenn von einem auf Zinszinsen angelegten Kapitale eine bestimmte jährliche Summe, welche die jährlichen Zinsen des Kapitals übersteigt, abgezogen wird, so heißt:

1) das Kapital die Mise,

2) die jährliche Summe eine Rente, und zwar

α) Jahr- oder Zeitrente (Annuität), wenn sie so lange dauert, bis das angelegte Kapital ganz aufgezehrt ist;

β) Leib- oder Lebensrente aber, wenn sie bis zum Tode des Empfängers fortgeht.

Ist hierüber ein Vertrag errichtet, so heißt

3) derjenige, welcher die Mise empfängt, und die Rente auszahlt, Entrepreneur;

4) der, welcher die Mise gibt, und die Rente empfängt, der Rentirer.

Die Berechnung der Zeitrenten geht ganz nach der §. praec. aufgestellten Form, wo K die Mise, B die bedungene Rente, n die Dauer derselben, oder die Anzahl der Jahre, p das Prozent ausdrückt. Da nun nach Verlauf von n Jahren das Kapital heimbezahlt seyn muß, so ist s allezeit = 0.

Die Leibrente ist als eine Zeitrente zu betrachten, für welche eine solche Anzahl von Jahren angenommen wird, als der Rentirer noch zu leben Wahrscheinlichkeit hat. Die Dauer der Leibrente wird aus Mortalitäts-Tabellen nach der Wahrscheinlichkeits-Rechnung bestimmt. Bei den Renten-Rechnungen sind folgende drei Aufgaben zu lösen.

§. 275.

I. Aufgabe. Aus der Mise K, der Rente B, dem Prozente p die jährliche Dauer der Rente, oder die Größe n zu finden.

Auflösung. $\left(\frac{cB-pK}{p}\right)\times\left(\frac{c+p}{c}\right)^n=\frac{cB}{p}$.

Setzt man für die zusammengesetzten Größen einfache, so wird:

$$\alpha\times\beta^n=\gamma$$

$$n=\frac{\text{Log. }\gamma-\text{ Log. }\alpha}{\text{Log. }\beta}.$$

Beispiel. Wie lange dauert eine Rente von jährlich 1000 fl., wenn die Mise 10.000 fl. zu 4 Prozent ist?

Antwort. 13,022 Jahre, oder 13 Jahre 6 Tage.

II. Aus den Größen K, p, n die Rente B zu finden.

Auflösung. $\frac{cB}{p} \times \left(\frac{c+p}{c}\right)^n - \frac{cB}{p} = \frac{pK\left(\frac{c+p}{c}\right)^n}{p}$.

$$B = pK\left(\frac{c+p}{c}\right)^n : c\left[\left(\frac{c+p}{c}\right)^n - 1\right].$$

Beispiel. Vom Kapitale 100.000 zu 5 Prozent floßen die jährlichen Renten 36 Jahre 8 Monate 22,8 Tage. Wie viel hatte die jährliche Rente betragen?

Antwort 6000 fl.

III. Aus den Größen B, n, p die Mise K zu finden.

Auflösung. Nach Aufgabe II. wird:

$$K = \frac{cB \times \left[\left(\frac{c+p}{c}\right)^n - 1\right]}{p \times \left[\frac{c+p}{c}\right]^n}.$$

Beispiel. Wie groß muß die Mise seyn, welche zu 4 Prozent eine zehnjährige Rente von jährlich 800 fl. abwirft?

Antwort. 6.488,716 fl.

II. Diskonto- oder Interusuriums-Rechnungen.

§. 276.

Erklärungen.

Den Werth einer Summe Geldes, welche erst nach einer gewissen Zeit verfällig ist, für Vorausbezahlung bestimmen, heißt diese Summe diskontiren. Da nämlich die Vorausbezahlung einer, nach einer bestimmten Zeit verfälligen, Summe von Seite des Schuldners nur dann ohne Nachtheil geschehen kann, wenn dieser so viel von der Summe abzieht, als der andere, dem die Summe voraus-

bezahlt wird, bis zur Verfallzeit an Zins gewinnen kann, wenn er das vorausbezahlte Geld sogleich ausleiht; so muß sich der Gläubiger, oder der, welchem die Summe vorausbezahlt wird, einen Abzug gefallen lassen, welcher bei einfachen Zinsen Diskonto oder Rabatt, bei Zinszinsen aber gewöhnlich Interusurium heißt. — Man kann nämlich nach einfachen oder zusammengesetzten Zinsen diskontiren. — Ueber die Diskonto-Rechnung nach einfachem Zinse s. §. 144. X.

Für die Interusuriums-Rechnung gilt die nämliche Formel $S = K\left(\frac{c+p}{c}\right)^n$, welche §. 267. für die Zinszinsen-Rechnung überhaupt entwickelt worden ist, wenn man K als die zu suchende Größe betrachtet, da hierbei auch um nichts anders gefragt wird, als: welche Summe (K) kann der Gläubiger fordern, daß er, wenn er sie sogleich auf Zinsen n Jahre lang auslegt, für Kapital und Zinszinsen eben so viel (S) erhält, als er nach jener Zeit vom Schuldner fordern könnte? Diese Frage wird beantwortet durch die Formel:

$$K = S\left(\frac{c}{c+p}\right)^n.$$

§. 277.

Beispiele.

I. Welches ist der baare Werth einer Summe von 100.000 fl., welche unverzinslich aufliegt, und nach 10 Jahren zahlbar ist, wenn nur 4 Prozent Diskonto erlaubt werden?

Auflösung. $K = 100.000 \times [\frac{25}{26}]^{10}$

$\text{Log. } K = \text{Log. } 100.000 + 10 \text{ Log. } \frac{25}{26}$

$\text{Log. } K = 5.0000000 + 0.8296670\ (-1)$

$\text{Log. } K = 4.8296670 = \text{Log. } 67.556{,}47$

$K = 67556{,}47$ fl.

II. Jemand genießt eine jährliche Rente von 1000 fl., die jetzt schon anfängt, und 20 Jahre dauert. Er will sie aber jetzt für baares Geld zu 5 Prozent verkaufen. Wie viel kann er mit Recht verlangen?

Auflösung. Der Werth dieser Rente wird durch folgende Progression bestimmt, wenn $1000 = m$ gesetzt wird:

$$m + m \cdot \tfrac{20}{21} + m\left(\tfrac{20}{21}\right)^2 + m\left(\tfrac{20}{21}\right)^3 \ldots\ldots + m\left(\tfrac{20}{21}\right)^{19}.$$

Hier ist $p = \frac{20}{21}$; folglich die Summe P der Progression, oder der Werth der vorauszubezahlenden Rente:

$$P = \frac{m - m \times \left[\frac{20}{21}\right]^{20}}{\frac{1}{21}} = 21\ [m - m\left(\tfrac{20}{21}\right)^{20}]$$

$$\text{Log. } m\left(\tfrac{20}{21}\right)^{20} = \text{Log. } 1000 + 20 \text{ Log. } \tfrac{20}{21} = 3.00\ldots$$
$$+ 20 \times [0.9788107\ (-1)]$$
$$\text{Log. } m\left(\tfrac{20}{21}\right)^{20} = 2.5762140 = \text{Log. } 376{,}889.$$

Folglich $P = 21\ [1000 - 376{,}889] = 13.085{,}331$ fl.

Anmerkung. Sucht man nach §. 275. III. die Mise, welche eine 19jährige Rente von 1000 fl. abwirft, und addirt man dazu 1000 fl., so kommt man auf das nämliche Resultat.

III. Eine Waldung wird zu 36000 Klaftern abgeschätzt. Wie viele Klafter mag sie vor 10 Jahren enthalten haben, wenn sie sich jährlich um 3 Prozent verbesserte?

Zur Uebung!

III. Zieler- oder Terminrechnungen.

§. 278.

Ueber Terminrechnung nach einfachem Zinse s. §. 144. XVI. u. §. 220. IV.

Bei den Terminrechnungen nach Zinszinsen liegt die Interusuriums-Rechnung zu Grunde; d. h. es muß sowohl der baare Werth der in Terminen zu zahlenden Partialsummen, als auch der baare Werth der ganzen Summe für die Vorausbezahlung bestimmt, und beide müssen nach den Bedingungen der Aufgabe mit einander verglichen werden.

Beispiele.

I. A ist dem B 1000 fl. nach 2 Jahren, 2000 fl. nach 4 Jahren, und 7000 fl. nach 6 Jahren zu zahlen schuldig. Er wünscht diese Schuld von 10000 fl. ohne seinen und seines Gläubigers Schaden auf einmal abzutragen; wann kann dieses geschehen, wenn 5 das landesübliche Prozent ist?

Operation.

$$10.000 \times \left[\tfrac{20}{21}\right]^x = 1000 \times \left[\tfrac{20}{21}\right]^2 + 2000 \times \left[\tfrac{20}{21}\right]^4 + 7000 * \left[\tfrac{20}{21}\right]^6$$

$$\text{Log. } 1000 + 2 \text{ Log. } \tfrac{20}{21} = 2.9576214 = \text{Log. } 907{,}0294$$
$$\text{Log. } 2000 + 4 \text{ Log. } \tfrac{20}{21} = 3.2162728 = \text{Log. } 1645{,}405$$
$$\text{Log. } 7000 + 6 \text{ Log. } \tfrac{20}{21} = 3.7179622 = \text{Log. } 5223{,}508$$

$$x = \frac{\text{Log. } 7775{,}9424 - \text{Log. } 10.000}{\text{Log. } \tfrac{20}{21}}$$

$$= \frac{0{,}1092469}{0.0211893} = 5{,}155 \text{ Jahre} = 5 \text{ Jahre } 1 \text{ Mon. } 26 \text{ Tage.}$$

II. Jemand ist für ein gekauftes Gut 40.000 fl. sogleich zu zahlen schuldig; er wünscht aber diese Schuld in 12jährigen Terminen abzutragen. Wieviel muß er jährlich zahlen, wenn 5 das landesübliche Prozent ist?

Operation. Er zahle jährlich x fl., so wird

$$40.000 \text{ fl.} = x \left[\tfrac{20}{21} + \left(\tfrac{20}{21}\right)^2 + \left(\tfrac{20}{21}\right)^3 + \ldots\ldots + \left(\tfrac{20}{21}\right)^{12}\right]$$

$$40.000 = x \frac{\left[\tfrac{20}{21} - \left(\tfrac{20}{21}\right)^{13}\right]}{1 - \tfrac{20}{21}} = \left[20 - \frac{20^{13}}{21^{12}}\right) x$$

$$x = \frac{40.000}{8{,}86326} = 4.513{,}013 \text{ fl.}$$

So viel muß jährlich bezahlt werden.

Anmerkung. Diese Aufgabe ist identisch mit folgender: Wie groß ist die zwölfjährige Rente, welche, zu 5 Prozent verzinset, die Summe von 40.000 abwirft?

III. A hat an B nach 3 Jahren 3000, und nach 8 Jahren 4000 fl. zu zahlen, und überdieß beide Summen bis zur Verfallzeit mit 3 Prozent zu verzinsen. Da aber B eben Geld vonnöthen hat, so macht sich A anheischig, 2000 fl. sogleich baar, das Uebrige aber nach einem Jahre, und mit 2 Prozent diskontirt zu zahlen. Wie viel wird A nach einem Jahre zu zahlen haben?

Operation. Hier muß der baare Werth sowohl der Zinsen, als auch der Kapitalien besonders bestimmt werden.

Die jährigen Zinsen von 3000 fl. zu 3 Prozent = 90 fl.
Die Zinsen von 4000 fl. . . . . = 120 fl.
Der baare Werth der dreijährigen Zinsen

$$= 90 \left[\tfrac{20}{21} + \left(\tfrac{20}{21}\right)^2 + \left(\tfrac{20}{21}\right)^3\right] = 244{,}7224 \text{ fl.}$$

Der baare Werth des ersten Kapitals

$= 3000 \times (\frac{20}{21})^3 = 2591{,}49.$

Der baare Werth der 8 jährigen Zinsen

$= 120\,[\frac{20}{21} + (\frac{20}{21})^2 + \ldots + (\frac{20}{21})^8] = 775{,}68$ fl.

Der baare Werth des zweiten Kapitals

$= 4000.\,(\frac{20}{21})^8 = 2707{,}34.$

Summe der vier Posten $= 6319{,}2324.$

Zieht man davon ab, was gleich baar bezahlt wird, so bleibt: 4319,2324 fl.

Also $x \times \frac{100}{102} = 4319{,}2324$

$x = 4405{,}615$ fl.

So viel hat A nach einem Jahre zu zahlen.

IV. Ein Fürst hatte einem verdienten Offiziere eine jährliche Rente auf zehn Jahre ausgesprochen, so zwar, daß dieser im ersten Jahre 100, im zweiten 200, im dritten 300, und so in jedem folgenden Jahre um 100 fl. mehr erhalten sollte. Weil aber dieser baares Geld vonnöthen hat, so läßt er sich die zehnjährige Rente gegen 6prozentiges Diskonto (auf Zinszinsen) vorausbezahlen. Welches ist der baare Werth der Rente?

Operation. Der Werth dieser zehnjährigen Rente, P, ist

$$= 100 \times \tfrac{100}{106} + 200\,[\tfrac{100}{106}]^2 + 300\,[\tfrac{100}{106}]^3 + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots + 1000\,[\tfrac{100}{106}]^{10}.$$

Man kann diese Reihe in folgende zerfällen:

I. $100 \times \frac{100}{106} + 100\,[\frac{100}{106}]^2 + 100\,[\frac{100}{106}]^3 + .. + .. + .. + .. + .. + 100\,[\frac{100}{106}]^{10}.$

II. $100\,[\frac{100}{106}]^2 + 100\,[\frac{100}{106}]^3 + .. + .. + .. + .. + .. + 100\,[\frac{100}{106}]^{10}.$

III. $100\,[\frac{100}{106}]^3 + 100\,[\frac{100}{106}]^4 + .. + .. + .. + .. + .. + 100\,[\frac{100}{106}]^{10}.$

+ IV. V. VI. VII. VIII. IX. X.

Nun ist die Summe der ersten Reihe $= \left[100^2 - \frac{100^{12}}{106^{10}}\right] : 6$

— — — — der zweiten — $= \left[\frac{100^3}{106} - \frac{100^{12}}{106^{10}}\right] : 6$

— — — — der dritten — $= \left[\frac{100^4}{106^2} - \frac{100^{12}}{106^{10}}\right] : 6$ u.s.w.

Die positiven Theile dieser Summe bilden eine geometrische Reihe, deren Betrag oder Summe = 78016,989 ist. Zieht man hiervon das Zehnfache des negativen $\frac{100^{12}}{106^{10}}$ ab, so ist der Rest = 22177,55, dessen sechster Theil = 3696,26 den baaren Werth der Rente angibt.

Dritte Abtheilung.

I. Tafeln der Quadrat = und Kubikzahlen von 1 bis 1000.

Z.	Quadr.	Kub.
1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729
10	100	1000
11	121	1331
12	144	1728
13	169	2197
14	196	2744
15	225	3375
16	256	4096
17	289	4913
18	324	5832
19	361	6859
20	400	8000
21	441	9261
22	484	10648
23	529	12167
24	576	13824
25	625	15625
26	676	17576
27	729	19683
28	784	21952
29	841	24389
30	900	27000
31	961	29791
32	1024	32768
33	1089	35937
34	1156	39304
35	1225	42875
36	1296	46656
37	1369	50653
38	1444	54872
39	1521	59319
40	1600	64000
41	1681	68921
42	1764	74088
43	1849	79507
44	1936	85184
45	2025	91125

Z.	Quadr.	Kub.
46	2116	97336
47	2209	103823
48	2304	110592
49	2401	117649
50	2500	125000
51	2601	132651
52	2704	140608
53	2809	148877
54	2916	157464
55	3025	166375
56	3136	175616
57	3249	185193
58	3364	195112
59	3481	205379
60	3600	216000
61	3721	226981
62	3844	238328
63	3969	250047
64	4096	262144
65	4225	274625
66	4356	287496
67	4489	300763
68	4624	314432
69	4761	328509
70	4900	343000
71	5041	357911
72	5184	373248
73	5329	389017
74	5476	405224
75	5625	421875
76	5776	438976
77	5929	456533
78	6084	474552
79	6241	493039
80	6400	512000
81	6561	531441
82	6724	551368
83	6889	571787
84	7056	592704
85	7225	614125
86	7396	636056
87	7569	658503
88	7744	681472
89	7921	704969
90	8100	729000

Z.	Quadr.	Kub.
91	8281	753571
92	8464	778688
93	8649	804357
94	8836	830584
95	9025	857375
96	9216	884736
97	9409	912673
98	9604	941192
99	9801	970299
100	10000	1000000
101	10201	1030301
102	10404	1061208
103	10609	1092727
104	10816	1124864
105	11025	1157625
106	11236	1191016
107	11449	1225043
108	11664	1259712
109	11881	1295029
110	12100	1331000
111	12321	1367631
112	12544	1404928
113	12769	1442897
114	12996	1481544
115	13225	1520875
116	13456	1560896
117	13689	1601613
118	13924	1643032
119	14161	1685159
120	14400	1728000
121	14641	1771561
122	14884	1815848
123	15129	1860867
124	15376	1906624
125	15625	1953125
126	15876	2000376
127	16129	2048383
128	16384	2097152
129	16641	2146689
130	16900	2197000
131	17161	2248091
132	17424	2299968
133	17689	2352637
134	17956	2406104
135	18225	2460375
136	18496	2515456
137	18769	2571353
138	19044	2628072
139	19321	2685619
140	19600	2744000
141	19881	2803221
142	20164	2863288
143	20449	2924207
144	20736	2985984
145	21025	3048625
146	21316	3112136
147	21609	3176523
148	21904	3241792
149	22201	3307949
150	22500	3375000
151	22801	3442951
152	23104	3511808
153	23409	3581577
154	23716	3652264
155	24025	3723875
156	24336	3796416
157	24649	3869893
158	24964	3944312
159	25281	4019679
160	25600	4096000
161	25921	4173281
162	26244	4251528
163	26569	4330747
164	26896	4410944
165	27225	4492125
166	27556	4574296
167	27889	4657463
168	28224	4741632
169	28561	4826809
170	28900	4913000
171	29241	5000211
172	29584	5088448
173	29929	5177717
174	30276	5268024
175	30625	5359375
176	30976	5451776
177	31329	5545233
178	31684	5639752
179	32041	5735339
180	32400	5832000

Z.	Quadr.	Kub.
181	32761	5929741
182	33124	6028568
183	33489	6128487
184	33856	6229504
185	34225	6331625
186	34596	6434856
187	34969	6539203
188	35344	6644672
189	35721	6751269
190	36100	6859000
191	36481	6967871
192	36864	7077888
193	37249	7189057
194	37636	7301384
195	38025	7414875
196	38416	7529536
197	38809	7645373
198	39204	7762392
199	39601	7880599
200	40000	8000000
201	40401	8120601
202	40804	8242408
203	41209	8365427
204	41616	8489664
205	42025	8615125
206	42436	8741816
207	42849	8869743
208	43264	8998912
209	43681	9129329
210	44100	9261000
211	44521	9393931
212	44944	9528128
213	45369	9663597
214	45796	9800344
215	46225	9938375
216	46656	10077696
217	47089	10218313
218	47524	10360232
219	47961	10503459
220	48400	10648000
221	48841	10793861
222	49284	10941048
223	49729	11089567
224	50176	11239424
225	50625	11390625

Z.	Quadr.	Kub.
226	51076	11543176
227	51529	11697083
228	51984	11852352
229	52441	12008989
230	52900	12167000
231	53361	12326391
232	53824	12487168
233	54289	12649337
234	54756	12812904
235	55225	12977875
236	55696	13144256
237	56169	13312053
238	56644	13481272
239	57121	13651919
240	57600	13824000
241	58081	13997521
242	58564	14172488
243	59049	14348907
244	59536	14526784
245	60025	14706125
246	60516	14886936
247	61009	15069223
248	61504	15252992
249	62001	15438249
250	62500	15625000
251	63001	14813251
252	63504	16003008
253	64009	16194277
254	64516	16387064
255	65025	16581375
256	65536	16777216
257	66049	16974593
258	66564	17173512
259	67081	17373979
260	67600	17576000
261	68121	17779581
262	68644	17984728
263	69169	18191447
264	69696	18399744
265	70225	18609625
266	70756	18821096
267	71289	19034163
268	71824	19248832
269	72361	19465109
270	72900	19683000

Z.	Quadr.	Kub.
271	73441	19902511
272	73984	20123648
273	74529	20346417
274	75076	20570824
275	75625	20796875
276	76176	21024576
277	76729	21253933
278	77284	21484952
279	77841	21717639
280	78400	21952000
281	78961	22188041
282	79524	22425768
283	80089	22665187
284	80656	22906304
285	81225	23149125
286	81796	23393656
287	82369	23639903
288	82944	23887872
289	83521	24137569
290	84100	24389000
291	84681	24642171
292	85264	24897088
293	85849	25153757
294	86436	25412184
295	87025	25672375
296	87616	25934336
297	88209	26198073
298	88804	26463592
299	89401	26730899
300	90000	27000000
301	90601	27270901
302	91204	27543608
303	91809	27818127
304	92416	28094464
305	93025	28372625
306	93636	28652616
307	94249	28934443
308	94864	29218112
309	95481	29503629
310	96100	29791000
311	96721	30080231
312	97344	30371328
313	97969	30664297
314	98596	30959144
315	99225	31255875
316	99856	31554496
317	100489	31855013
318	101124	32157432
319	101761	32461759
320	102400	32768000
321	103041	33076161
322	103684	33386248
323	104329	33698267
324	104976	34012224
325	105625	34328125
326	106276	34645976
327	106929	34965783
328	107584	35287552
329	108241	35611289
330	108900	35937000
331	109561	36264691
332	110224	36594368
333	110889	36926037
334	111556	37259704
335	112225	37595375
336	112896	37933056
337	113569	38272753
338	114244	38614472
339	114921	38958219
340	115600	39304000
341	116281	39651821
342	116964	40001688
343	117649	40353607
344	118336	40707584
345	119025	14063625
346	119716	41421736
347	120409	41781923
348	121104	42144192
349	121801	42508549
350	122500	42875000
351	123201	43243551
352	123904	43614208
353	124609	43986977
354	125316	44361864
355	126025	44738875
356	126736	45118016
357	127449	45499293
358	128164	45882712
359	128881	46268279
360	129600	46656000

Z.	Quadr.	Kub.	Z.	Quadr.	Kub.
361	130321	47045881	406	164836	66923416
362	131044	47437928	407	165649	67419143
363	131769	47832147	408	166464	67917312
364	132496	48228544	409	167281	68417929
365	133225	48627125	410	168100	68921000
366	133956	49027896	411	168921	69426531
367	134689	49430863	412	169744	69934528
368	135424	49836032	413	170569	70444997
369	136161	50243409	414	171396	70957944
370	136900	50653000	415	172225	71473375
371	137641	51064811	416	173056	71991296
372	138384	51478848	417	173889	72511713
373	139129	51895117	418	174724	73034632
374	139876	52313624	419	175561	73560059
375	140625	52734375	420	176400	74088000
376	141376	53157376	421	177241	74618461
377	142129	53582633	422	178084	75151448
378	142884	54010152	423	178929	75686967
379	143641	54439939	424	179776	76225024
380	144400	54872000	425	180625	76765625
381	145161	55306341	426	181476	77308776
382	145924	55742968	427	182329	77854483
383	146689	56181887	428	183184	78402752
384	147456	56623104	429	184041	78953589
385	148225	57066625	430	184900	79507000
386	148996	57512456	431	185761	80062991
387	149769	57960603	432	186624	80621568
388	150544	58411072	433	187489	81182737
389	151321	58863869	434	188356	81746504
390	152100	59319000	435	189225	82312875
391	152881	59776471	436	190096	82881856
392	153664	60236288	437	190969	83453453
393	154449	60698457	438	191844	84027672
394	155236	61162984	439	192721	84604519
395	156025	61629375	440	193600	85184000
396	156816	62099136	441	194481	85766121
397	157609	62570773	442	195364	86350888
398	158404	63044792	443	196249	86938307
399	159201	63521199	444	197136	87528384
400	160000	64000000	445	198025	88121125
401	160801	64481201	446	198916	88716536
402	161604	64964808	447	199809	89314623
403	162409	65450827	448	200704	89915392
404	163216	65939264	449	201601	90518849
405	164025	66430125	450	202500	91125000

Z.	Quadr.	Kub.	Z.	Quadr.	Kub.
451	203401	91733851	496	246016	122023936
452	204304	92345408	497	247009	122763473
453	205209	92959677	498	248004	123505992
454	206116	93576664	499	249001	124251499
455	207025	94196375	500	250000	125000000
456	207936	94818816	501	251001	125751501
457	208849	95443993	502	252004	126506008
458	209764	96071912	503	253009	127263527
459	210681	96702579	504	254016	128024064
460	211600	97336000	505	255025	128787625
461	212521	97972181	506	256036	129554216
462	213444	98611128	507	257049	130323843
463	214369	99252847	508	258064	131096512
464	215296	99897344	509	259081	131872229
465	216225	100544625	510	260100	132651000
466	217156	101194696	511	261121	133432831
467	218089	101847563	512	262144	134217728
468	219024	102503232	513	263169	135005697
469	219961	103161709	514	264196	135796744
470	220900	103823000	515	265225	136590875
471	221841	104487111	516	266256	137388096
472	222784	105154048	517	267289	138188413
473	223729	105823817	518	268324	138991832
474	224676	106496424	519	269361	139798359
475	225625	107171875	520	270400	140608000
476	226576	107850176	521	271441	141420761
477	227529	108531333	522	272484	142236648
478	228484	109215352	523	273529	143055667
479	229441	109902239	524	274576	143877824
480	230400	110592000	525	275625	144703125
481	231361	111284641	526	276676	145531576
482	232324	111980168	527	277729	146363183
483	233289	112678587	528	278784	147197952
484	234256	113379904	529	279841	148035889
485	235225	114084125	530	280900	148877000
486	236196	114791256	531	281961	149721291
487	237169	115501303	532	283024	150568768
488	238144	116214272	533	284089	151419337
489	239121	116930169	534	285156	152273304
490	240100	117649000	535	286225	153130375
491	241081	118370771	536	287296	153990656
492	242064	119095488	537	288369	154854153
493	243049	119823157	538	289444	155720872
494	244036	120553784	539	290521	156590819
495	245025	121287375	540	291600	157464000

Z.	Quadr.	Kub.	Z.	Quadr.	Kub.
541	292681	158340421	586	343396	201230056
542	293764	159220088	587	344569	202262003
543	294849	160103007	588	345744	203297472
544	295936	160989184	589	346921	204336469
545	297025	161878625	590	348100	205379000
546	298116	162771336	591	349281	206425071
547	299209	163667323	592	350464	207474688
548	300304	164566592	593	351649	208527857
549	301401	165469149	594	352836	209584584
550	302500	166375000	595	354025	210644875
551	303601	167284151	596	355216	211708736
552	304704	163196608	597	356409	212776173
553	305809	169112377	598	357604	213847192
554	306916	170031464	599	358801	214921799
555	308025	170953875	600	360000	216000000
556	309136	171879616	601	361201	217081801
557	310249	172808693	602	362404	218167208
558	311364	173741112	603	363609	219256227
559	312481	174676879	604	364816	220348864
560	313600	175616000	605	366025	221445125
561	314721	176558481	606	367236	222545016
562	315844	177504328	607	368449	223648543
563	316969	178453547	608	369664	224755712
564	318096	179406144	609	370881	225866529
565	319225	180362125	610	372100	226981000
566	320356	181321496	611	373321	228099131
567	321489	182284263	612	374544	229220928
568	322624	183250432	613	375769	230346397
569	323761	184220009	614	376996	231475544
570	324900	185193000	615	378225	232608375
571	326041	186169411	616	379456	233744896
572	327184	187149248	617	380689	234885113
573	328329	188132517	618	381924	236029032
574	329476	189119224	619	383161	237176659
575	330625	190109375	620	384400	238328000
576	331776	191102976	621	385641	239483061
577	332929	192100033	622	386884	240641848
578	334084	193100552	623	388129	241804367
579	335241	194104539	624	389376	242970624
580	336400	195112000	625	396625	244140625
581	337561	196122941	626	391876	245314376
582	338724	197137368	627	393129	246491883
583	339889	198155287	628	394384	247673152
584	341056	199176704	629	395641	248858189
585	342225	200201625	630	396900	250047000

Z.	Quadr	Kub.
631	398161	251239591
632	399424	252435968
633	400689	253636137
634	401956	254840104
635	403225	256047875
636	404496	257259456
637	405769	258474853
638	407044	259694072
639	408321	260917119
640	409600	262144000
641	410881	263374721
642	412164	264609288
643	413449	265847707
644	414736	267089984
645	416025	268336125
646	417316	269586136
647	418609	270840023
648	419904	272097792
649	421201	273359449
650	422500	274625000
651	423801	275894451
652	425104	277167808
653	426409	278445077
654	427716	279726264
955	429025	281011375
656	430336	282300416
657	431649	283593393
658	432964	284890312
659	434281	286191179
660	435600	287496000
661	436921	288804781
662	438244	290117528
663	439569	291434247
664	440896	292754944
665	442225	294079625
666	443556	295408296
667	444889	296740963
668	446224	298077632
669	447561	299418309
670	448900	300763000
671	450241	302111711
672	451584	303464448
673	452929	304821217
674	454276	306182024
675	455625	307556875

Z.	Quadr.	Kub.
676	456976	308915776
677	458329	310288733
678	459684	311665752
679	461041	313046839
680	462400	314432000
681	463761	315821241
682	465124	317214568
683	466589	318611987
684	467856	320013504
685	469225	321419125
686	470596	322828856
687	471969	324242703
688	473344	325660672
689	474721	327082769
690	476100	328509000
691	477481	329939317
692	478864	331373888
693	480249	332812557
694	481636	334255384
695	483025	335702375
696	484416	337173536
697	485806	338608873
698	487204	340068392
699	488601	341532099
700	490000	343000000
701	491401	344472101
702	492804	345948408
703	494209	347428927
704	495616	348913664
705	497025	350402625
706	498436	351895816
707	499849	353393243
708	501264	354894912
709	502681	356400829
710	504100	357911000
711	505521	359425431
712	506944	360944128
713	508369	362467097
714	509796	363994344
715	511225	365525875
716	512656	367061696
717	514089	368601813
718	515524	370146232
719	516961	371694959
720	518400	373248000

Z.	Quadr.	Kub.	Z.	Quadr.	Kub.
721	519841	374805361	766	586756	449455096
722	521284	376367048	767	588289	451217663
723	522729	377933067	768	589824	452984832
724	524176	379503424	769	591361	454756609
725	525625	381078125	770	592900	456533000
726	527076	382657176	771	594441	458314011
727	528529	384240583	772	595984	460099648
728	529984	385828352	773	597529	461889917
729	531441	387420489	774	599076	463684824
730	532900	389017000	775	600625	465484375
731	534361	390617891	776	602176	467288576
732	535824	392223168	777	603729	469097433
733	537289	393832837	778	605284	470910952
734	538756	395446904	779	606841	472729139
735	540225	397065375	780	608400	474552000
736	541696	398688256	781	609961	476379541
737	543169	400315553	782	611524	478211768
738	544644	401947272	783	613089	480048687
739	546121	403583419	784	614656	481890304
740	547600	405224000	785	616225	483736625
741	549081	406869021	786	617796	485587656
742	550564	408518488	787	619369	487443403
743	552049	410172407	788	620944	489303872
744	553536	411830784	789	622521	491169069
745	555025	413493625	790	624100	493039000
746	556516	415160936	791	625681	494913671
747	558009	416832723	792	627264	496793088
748	559504	418508992	793	628849	498677257
749	561001	420189749	794	630436	500566184
750	562500	421875000	795	632025	502459875
751	564001	423564751	796	633616	504358336
752	565504	425259008	797	635209	506261573
753	567009	426957777	798	636804	508169592
754	568516	428661064	799	638401	510082399
755	570025	430368875	800	640000	512000000
756	571536	432081216	801	641601	513922401
757	573049	433798093	802	643204	515849608
758	574564	435519512	803	644809	517781627
759	576081	437245479	804	646416	519718464
760	577600	438976000	805	648025	521660125
761	579121	440711081	806	649636	523606616
762	580644	442450728	807	651249	525557943
763	582169	444194947	808	652864	527514112
764	583696	445943744	809	654481	529475129
765	585225	447697125	810	656100	531441000

Z.	Quadr.	Kub.	Z.	Quadr.	Kub.
811	657721	533411731	856	732736	627222016
812	659344	535387328	857	734449	629422793
813	660969	537367797	858	736164	631628712
814	662596	539353144	859	737881	633839779
815	664225	541343375	860	739600	636056000
816	665856	543338496	861	741321	638277381
817	667489	545338513	862	743044	640503928
818	669124	547343432	863	744769	642735647
819	670761	549353259	864	746496	644972544
820	672400	551368000	865	748225	647214625
821	674041	553387661	866	749956	649461896
822	675684	555412248	867	751689	651714363
823	677329	557441767	868	753424	653972032
824	678976	559476224	869	755161	656234909
825	680625	561515625	870	756900	658503000
826	682276	563559976	871	758641	660776311
827	683929	565689283	872	760384	663054848
828	685584	567663552	873	762129	665338617
829	687241	569722789	874	763876	667627624
830	688900	571787000	875	765625	669921875
831	690561	573856191	876	767376	672221376
832	692224	575930368	877	769129	674526133
833	693889	578009537	878	770884	676836152
834	695556	580093704	879	772641	679151439
835	697225	582182875	880	774400	681472000
836	698896	584277056	881	776161	683797841
837	700569	586376253	882	777924	686128968
838	702244	588480472	883	779689	688465387
839	703921	590589719	884	781456	690807104
840	705600	592704000	885	783225	693154125
841	707281	594823321	886	784996	695506456
842	708964	596947688	887	786769	697864103
843	710649	599077107	888	788544	700227072
844	712336	601211584	889	790321	702595369
845	714025	603351125	890	792100	704969000
846	715716	605495736	891	793881	707347971
847	717409	607645423	892	795664	709732288
848	719104	609800192	893	797449	712121957
849	720801	611960049	894	799236	714516984
850	722500	614125000	895	801025	716917375
851	724201	616295051	896	802816	719323136
852	725904	618470208	897	804609	721734273
853	727609	620650477	898	806404	724150792
854	729316	622835864	899	808201	726572692
855	731025	625026375	900	810000	729000000

Z.	Quadr.	Kub.	Z.	Quadr.	Kub.
901	811801	731432701	946	894916	846590536
902	813604	733870808	947	896809	849278123
903	815409	736314327	948	898704	851971392
904	817216	738763264	949	900601	854670349
905	819025	741217625	950	902500	857375000
906	820836	743677416	951	904401	860085351
907	822649	746142643	952	906304	862801408
908	824464	748613312	953	908209	865523177
909	826281	751089429	954	910116	868250664
910	828100	753571000	955	912025	870983875
911	829921	756058031	956	913936	873722816
912	831744	758550528	957	915849	876467493
913	833569	761048497	958	917764	879217912
914	835396	763551944	959	919681	881974079
915	837225	766060875	960	921600	884736000
916	839056	768575296	961	923521	887503681
917	840889	771095213	962	925444	890277128
918	842724	773620632	963	927369	893056347
919	844561	776151559	964	929296	895841344
920	846400	778688000	965	931225	898632125
921	848241	781229961	966	933156	901428696
922	850084	783777448	967	935089	904231063
923	851929	786330467	968	937024	907039232
924	853776	788889024	969	938961	909853209
925	855625	791453125	970	940900	912673000
926	857476	794022776	971	942841	915498611
927	859329	796597983	972	944784	918330048
928	861184	799178752	973	946729	921167317
929	863041	801765089	974	948676	924010424
930	864900	804357000	975	950625	926859375
931	866761	806954491	976	952576	929714176
932	868624	809557568	977	954529	932574833
933	870489	812166237	978	956484	935441352
934	872356	814780504	979	958441	938313739
935	874225	817400375	980	960400	941192000
936	876096	820025856	981	962361	944076141
937	877969	822656953	982	964324	946966168
938	879844	825293672	983	966289	949862087
939	881721	827936019	984	968256	952763904
940	883600	830584000	985	970225	955671625
941	885481	833237621	986	972196	958585256
942	887364	835896888	987	974169	961504303
943	889249	838561807	988	976144	964430272
944	891136	841232384	989	978121	967361669
945	893025	843908625	990	980100	970299000

Z.	Quadr.	Kub.	Z.	Quadr.	Kub.
991	982081	973242271	996	992016	988047936
992	984064	976191488	997	994009	991026973
993	986049	979146657	998	996004	994011992
994	988036	982107784	999	998001	997002999
995	990025	985074875	1000	1000000	1000000000

II. Tafeln

der Quadrat- und Kubikwurzeln

aller natürlichen Zahlen von 1 bis 1000.

Z.	Q.Wurzel.	K.Wurzel.	Z.	Q.Wurzel.	K.Wurzel.
1	1.0000000	1.0000000	46	6.7823300	3.5830479
2	1.4142136	1.2599205	47	6.8556547	3.6088261
3	1.7320508	1.4422496	48	6.9282032	3.6342411
4	2.0000000	1.5874011	49	7.0000000	3.6593057
5	2.2360680	1.7099759	50	7.0710678	3.6840314
6	2.4494897	1.8171206	51	7.1414284	3.7084298
7	2.6457513	1.9129312	52	7.2111026	3.7325111
8	2.8284271	2.0000000	53	7.2801099	3.7562858
9	3.0000000	2.0800837	54	7.3484692	3.7797631
10	3.1622777	2.1544347	55	7.4161985	3.8029525
11	3.3166248	2.2239801	56	7.4833148	3.8258624
12	3.4641016	2.2894286	57	7.5498344	3.8485011
13	3.6055513	2.3513347	58	7.6157731	3.8708766
14	3.7416574	2.4101422	59	7.6811458	3.8929965
15	3.8729833	2.4662121	60	7.7459667	3.9148676
16	4.0000000	2.5198421	61	7.8102497	3.9364972
17	4.1231056	2.5712816	62	7.8740078	3.9578915
18	4.2426407	2.6207414	63	7.9372539	3.9790571
19	4.3588989	2.6684016	64	8.0000000	4.0000000
20	4.4721359	2.7144177	65	8.0622577	4.0207256
21	4.5825757	2.7589243	66	8.1240384	4.0412401
22	4.6904158	2.8020393	67	8.1853527	4.0615480
23	4.7958315	2.8438670	68	8.2462112	4.0816551
24	4.8989795	2.8844991	69	8.3066239	4.1015661
25	5.0000000	2.9240177	70	8.3666003	4.1212853
26	5.0990195	2.9624960	71	8.4261497	4.1408178
27	5.1961524	3.0000000	72	8.4852814	4.1601676
28	5.2915026	3.0365889	73	8.5440037	4.1793390
29	5.3851648	3.0723168	74	8.6023253	4.1983364
30	5.4772256	3.1072325	75	8.6602540	4.2171633
31	5.5677644	3.1413806	76	8.7177978	4.2358236
32	5.6568543	3.1748021	77	8.7749644	4.2543210
33	5.7445626	3.2075343	78	8.8317609	4.2726586
34	5.8309519	3.2396118	79	8.8881944	4.2908404
35	5.9160798	3.2710663	80	8.9442719	4.3088695
36	6.0000000	3.3019272	81	9.0000000	4.3267487
37	6.0827625	3.3322218	82	9.0553851	4.3444815
38	6.1644140	3.3619754	83	9.1104336	4.3620707
39	6.2449980	3.3912114	84	9.1651514	4.3795191
40	6.3245553	3.4199519	85	9.2195445	4.3968296
41	6.4031242	3.4482172	86	9.2736185	4.4140049
42	6.4807407	3.4760266	87	9.3273791	4.4310476
43	6.5574385	3.5033981	88	9.3808315	4.4479602
44	6.6332496	3.5303483	89	9.4339811	4.4647451
45	6.7082039	3.5568933	90	9.4868330	4.4814047

Z.	Q.Wurzel.	K.Wurzel.	Z.	Q.Wurzel.	K.Wurzel.
91	9.5393919	4.4979414	136	11.6619038	5.1425632
92	9.5916630	4.5143574	137	11.7046999	5.1551368
93	9.6436507	4.5306549	138	11.7473401	5.1676492
94	9.6953597	4.5468359	139	11.7898261	5.1801013
95	9.7467943	4.5629026	140	11.8321596	5.1924941
96	9.7979589	4.5788570	141	11.8743421	5.2048279
97	9.8488577	4.5947009	142	11.9163753	5.2171034
98	9.8994949	4.6104363	143	11.9582607	5.2293215
99	9.9498744	4.6260650	144	12.0000000	5.2414828
100	10.0000000	4.6415888	145	12.0415945	5.2535878
101	10.0498756	4.6570095	146	12.0830460	5.2656374
102	10.0995049	4.6723288	147	12.1243556	5.2776321
103	10.1488915	4.6875481	148	12.1655251	5.2895725
104	10.1980390	4.7026694	149	12.2065556	5.3014592
105	10.2469507	4.7176940	150	12.2474487	5.3132928
106	10.2956301	4.7326234	151	12.2882057	5.3250740
107	10.3440804	4.7474594	152	12.3288280	5.3368033
108	10.3923048	4.7622032	153	12.3693169	5.3484812
109	10.4403065	4.7768562	154	12.4096737	5.3601085
110	10.4880885	4.7914199	155	12.4498996	5.3716853
111	10.5356537	4.8058956	156	12.4899960	5.3832126
112	10.5830052	4.8202845	157	12.5299641	5.3946907
113	10.6301458	4.8345881	158	12.5698051	5.4061202
114	10.6770782	4.8488075	159	12.6095202	5.4175016
115	10.7238053	4.8629441	160	12.6491106	5.4288352
116	10.7703296	4.8769989	161	12.6885775	5.4401218
117	10.8166538	4.8909730	162	12.7279220	5.4513618
118	10.8627805	4.9048681	163	12.7671453	5.4625556
119	10.9087121	4.9186847	164	12.8062485	5.4737036
120	10.9544511	4.9324242	165	12.8452326	5.4848065
121	11.0000000	4.9460874	166	12.8840987	5.4958647
122	11.0453610	4.9596756	167	12.9228480	5.5068784
123	11.0905365	4.9731898	168	12.9614814	5.5178484
124	11.1355287	4.9866309	169	13.0000000	5.5287748
125	11.1803399	5.0000000	170	13.0384048	5.5396583
126	11.2249722	5.0132980	171	13.0766968	5.5504993
127	11.2694276	5.0265257	172	13.1148770	5.5612979
128	11.3137085	5.0396842	173	13.1529464	5.5720547
129	11.3578167	5.0527744	174	13.1909059	5.5827701
130	11.4017542	5.0657970	175	13.2287565	5.5934447
131	11.4455231	5.0787531	176	13.2664992	5.6040787
132	11.4891253	5.0916434	177	13.3041347	5.6146724
133	11.5325626	5.1044687	178	13.3416641	5.6252263
134	11.5758369	5.1172299	179	13.3790882	5.6357408
135	11.6189500	5.1299275	180	13.4164078	5.6462162

Z.	Q.Wurzel.	K.Wurzel.	Z.	Q.Wurzel.	K.Wurzel
181	13.4536240	5.6566528	226	15.0332964	6.0911994
182	13.4907376	5.6670511	227	15.0665192	6.1001704
183	13.5277492	5.6774114	228	15.0996689	6.1091148
184	13.5646599	5.6877340	229	15.1327459	6.1180332
185	13.6014705	5.6980192	230	15.1657509	6.1269256
186	13.6381817	5.7082670	231	15.1986841	6.1357924
187	13.6747943	5.7184790	232	15.2315462	6.1446336
188	13.7113092	5.7286544	233	15.2643375	6.1534494
189	13.7477271	5.7387937	234	15.2970585	6.1622401
190	13.7840487	5.7488970	235	15.3297097	6.1710058
191	13.8202749	5.7589652	236	15.3622915	6.1797466
192	13.8564064	5.7689986	237	15.3948043	6.1884628
193	13.8924440	5.7789965	238	15.4272486	6.1971543
194	13.9283883	5.7889603	239	15.4596248	6.2058218
195	13.9642400	5.7988907	240	15.4919333	6.2144650
196	14.0000000	5.8087857	241	15.5241747	6.2230843
197	14.0356688	5.8186478	242	15.5563492	6.2316796
198	14.0712473	5.8284766	243	15.5884573	6.2402515
199	14.1067356	5.8382724	244	15.6204993	6.2487999
200	14.1421356	5.8480354	245	15.6524759	6.2573247
201	14.1774468	5.8577661	246	15.6843871	6.2658265
202	14.2126704	5.8674643	247	13.7162337	6.2743053
203	14.2478069	5.8771306	248	15.7480157	6.2827613
204	14.2828569	5.8867635	249	15.7797339	6.2911946
205	14.3178210	5.8963688	250	15.8113883	6.2996052
206	14.3527000	5.9059405	251	15.8429795	6.3079935
207	14.3874946	5.9154817	252	15.8745079	6.3163596
208	14.4222051	5.9249921	253	15.9059737	6.3247035
209	14.4568323	5.9344721	254	15.9373775	6.3330255
210	14.4913767	5.9439218	255	15.9687194	6.3413257
211	14.5258390	5.9533418	256	16.0000000	6.3496042
212	14.5602197	5.9627320	257	16.0312195	6.3578612
213	14.5945195	5.9720926	258	16.0623784	6.3660968
214	14.6287387	5.9814240	259	16.0934769	6.3743111
215	14.6628783	5.9907264	260	16.1245155	6.3825043
216	14.6969385	6.0000000	261	16.1554944	6.3906765
217	14.7309199	6.0092449	262	16.1864140	6.3988279
218	14.7648231	6.0184616	263	16.2172747	6.4069586
219	14.7986485	6.0276501	264	16.2480768	6.4150686
220	14.8323969	6.0368106	265	16.2788206	6.4231583
221	14.8660687	6.0459436	266	16.3095064	6.4312275
222	14.8996644	6.0550489	267	16.3401346	6.4392767
223	14.9331845	6.0641270	268	16.3707055	6.4473057
224	14.9666295	6.0731780	269	16.4012195	6.4553148
225	15.0000000	6.0822019	270	16.4316767	6.4633041

Z.	Q.Wurzel.	K.Wurzel.	Z.	Q.Wurzel.	K.Wurzel.
271	16.4620776	6.4712736	316	17.7763888	6.8112846
272	16.4924225	6.4792236	317	17.8044938	6.8184620
273	16.5227116	6.4871547	318	17.8325545	6.8256242
274	16.5529453	6.4950653	319	17.8605711	6.8327714
275	16.5831239	6.5029571	320	17.8885438	6.8399037
276	16.6132477	6.5108301	321	17.9164729	6.8470212
277	16.6433170	6.5186840	322	17.9443584	6.8541240
278	16.6733320	6.5265183	323	17.9722008	6.8612120
279	16.7032931	6.5343349	324	18.0000000	6.8682855
280	16.7332005	6.5421326	325	18.0277564	6.8753444
281	16.7630546	6.5499116	326	18.0554701	6.8823887
282	16.7928553	6.5576722	327	18.0831413	6.8894186
283	16.8226039	6.5654144	328	18.1107703	6.8964344
284	16.8522995	6.5731392	329	18.1383571	6.9034360
285	16.8819430	6.5808444	330	18.1659021	6.9104232
286	16.9115345	6.5885323	331	18.1934054	6.9173964
287	16.9410743	6.5962023	332	18.2208671	6.9243555
288	16.9705628	6.6038545	333	18.2482876	6.9313007
289	17.0000000	6.6114890	334	18.2756669	6.9382321
290	17.0293864	6.6191059	335	18.3030055	6.9451495
291	17.0587221	6.6267054	336	18.3303029	6.9520533
292	17.0880075	6.6342874	337	18.3575598	6.9589434
293	17.1172427	6.6418523	338	18.3847763	6.9658198
294	17.1464283	6.6493997	339	18.4119526	6.9726827
295	17.1755640	6.9569301	340	18.4390889	6.9795321
296	17.2046505	6.6644437	341	18.4661853	6.9863680
297	17.2336879	6.6719403	342	18.4932420	6 9931906
298	17.2626765	6.6794200	343	18.5202592	7.0000000
299	17.2916164	6.6868831	344	18.5472370	7.0067961
300	17.3205081	6.6943296	345	18.5741756	7.0135791
301	17.3493516	6.7017594	346	18.6010752	7.0203489
302	17.3781472	6.7091728	347	18.6279360	7.0271058
303	17.4068952	6.7165699	348	18.6547584	7.0338496
304	17.4355958	6.7239508	349	18.6815416	7.0405800
305	17.4642492	6.7313155	350	18.7082869	7.0472980
306	17.4928557	6.7386641	351	18.7349939	7.0540040
307	17.5214155	6.7459972	352	18.7616630	7.0606966
308	17.5499288	6.7533128	353	18.7882942	7.0673766
309	17.5783958	6.7606153	354	18.8148876	7.0740439
310	17.6068168	6.7678994	355	18.8414436	7.0806987
311	17.6351921	6.7751689	356	18.8679622	7.0873411
312	17.6635217	6.7824228	357	18.8944436	7.0939709
313	17.6918060	6.7896613	358	18.9208879	7.1005883
314	17.7200452	6.7968843	359	18.9472953	7.1071936
315	17.7482393	6.8040921	360	18.9736659	7.1137866

Z.	Q. Wurzel.	K. Wurzel.	Z.	Q. Wurzel.	K. Wurzel.
361	19.0000000	7.1203673	406	20.1494417	7.4047206
362	19.0262976	7.1269359	407	20.1742410	7.4107950
363	19.0525589	7.1334923	408	20.1990099	7.4168595
364	19.0787840	7.1400369	409	20.2237484	7.4229141
365	19.1049734	7.1465694	410	20.2484567	7.4289588
366	19.1311265	7.1530901	411	20.2731349	7.4349937
367	19.1572441	7.1595988	412	20.2977831	7.4410189
368	19.1833261	7.1660958	413	20.3224014	7.4470342
369	19.2093727	7.1725808	414	20.3469899	7.4530399
370	19.2353841	7.1790543	415	20.3715488	7.4590359
371	19.2614603	7.1855162	416	20.3960780	7.4650223
372	19.2873015	7.1919663	417	20.4205779	7.4709992
373	19.3132079	7.1984050	418	20.4450483	7.4769662
374	19.3390796	7.2048321	419	20.4694895	7.4829241
375	19.3649167	7.2112478	420	20.4939015	7.4888723
376	19.3907194	7.2176522	421	20.5182845	7.4948112
377	19.4164878	7.2240451	422	20.5426386	7.5007406
378	19.4422221	7.2304267	423	20.5669638	7.5066607
379	19.4679224	7.2367972	424	20.5912603	7.5125715
380	19.4935887	7.2431564	425	20.6155281	7.5184729
381	19.5192213	7.2495045	426	20.6397677	7.5243652
382	19.5448204	7.2558415	427	20.6639784	7.5302482
383	19.5703858	7.2621674	428	20.6881609	7.5361220
384	19.5959180	7.2684823	429	20.7123152	7.5419867
385	19.6214169	7.2747863	430	20.7364413	7.5478423
386	19.6468827	7.2810794	431	20.7605395	7.5536889
387	19.6723156	7.2873616	432	20.7846097	7.5595260
388	19.6977156	7.2936330	433	20.8086520	7.5653548
389	19.7230829	7.2998936	434	20.8326667	7.5711742
390	19.7484176	7.3061436	435	20.8566539	7.5769848
391	19.7737199	7.3123828	436	20.8806130	7.5827865
392	19.7989899	7.3186114	437	20.9045450	7.5885793
393	19.8242276	7.3248294	438	20.9284495	7.5943633
394	19.8494332	7.3310369	439	20.9523269	7.6001385
395	19.8746069	7.3372339	440	20.9761770	7.6059050
396	19.8997487	7.3434204	441	21.0000000	7.6116626
397	19.9248588	7.3495966	442	21.0237960	7.6174116
398	19.9499373	7.3557622	443	21.0475652	7.6231519
399	19.9749844	7.3619177	444	21.0713075	7.6288836
400	20.0000000	7.3680630	445	21.0950231	7.6346067
401	20.0249844	7.3741979	446	21.1187121	7.6403212
402	20.0499376	7.3803227	447	21.1423745	7.6460272
403	20.0748599	7.3864373	448	21.1660105	7.6517247
404	20.0997512	7.3925416	449	21.1896201	7.6574137
405	20.1246118	7.3986362	450	21.2132034	7.6630940

Z.	Q.Wurzel.	K.Wurzel.	Z.	Q.Wurzel.	K.Wurzel.
451	21.2367606	7.6687664	496	22.2710575	7.9157832
452	21.2602916	7.6744304	497	22.2934968	7.9210994
453	21.2837966	7.6800862	498	22.3159136	7.9264085
454	21.3072757	7.6857333	499	22.3383079	7.9317104
455	21.3307290	7.6913716	500	22.3606798	7.9370058
456	21.3541565	7.6970022	501	22.3830292	7.9422931
457	21.3775581	7.7026242	502	22.4053565	7.9475737
458	21.4009345	7.7082391	503	22.4276615	7.9528476
459	21.4242853	7.7138448	504	22.4499443	7.9581144
460	21.4476106	7.7194426	505	22.4722051	7.9633742
461	21.4709105	7.7250324	506	22.4944437	7.9686271
462	21.4941852	7.7306140	507	22.5166605	7.9738731
463	21.5174348	7.7361877	508	22.5388553	7.9791122
464	21.5406592	7.7417533	509	22.5610283	7.9843583
465	21.5638587	7.7473107	510	22.5831795	7.9895697
466	21.5870331	7.7528605	511	22.6053091	7.9947883
467	21.6101828	7.7584022	512	22.6274170	8.0000000
468	21.6333076	7.7639360	513	22.6495033	8.0052049
469	21.6564078	7.7694620	514	22.6715681	8.0104031
470	21.6794834	7.7749806	515	22.6936114	8.0155945
471	21.7025344	7.7804903	516	22.7156334	8.0207793
472	21.7255609	7.7859931	517	22.7376340	8.0259574
473	21.7485631	7.7914875	518	22.7596136	8.0311282
474	21.7715410	7.7969745	519	22.7815715	8.0362934
475	21.7944947	7.8024537	520	22.8035085	8.0414515
476	21.8174242	7.8079253	521	22.8254244	8.0466030
477	21.8403197	7.8133892	522	22.8473193	8.0517479
478	21.8632111	7.8188450	523	22.8691932	8.0568862
479	21.8860686	7.8242942	524	22.8910463	8.0620180
480	21.9089022	7.8297353	525	22.9128785	8.0671432
481	21.9317122	7.8351687	526	22.9346898	8.0722625
482	21.9544984	7.8405949	527	22.9564805	8.0773743
483	21.9772609	7.8460133	528	22.9782505	8.0824800
484	22.0000000	7.8514240	529	23.0000000	8.0875794
485	22.0227155	7.8568280	530	23.0217288	8.0926723
486	22.0454077	7.8622241	531	23.0434372	8.0977588
487	22.0680765	7.8676130	532	23.0651252	8.1028385
488	22.0907220	7.8729944	533	23.0867928	8.1079128
489	22.1133444	7.8783684	534	23.1084400	8.1129830
490	22.1359436	7.8837352	535	23.1300670	8.1180413
491	22.1585198	7.8890946	536	23.1516738	8.1230962
492	22.1810730	7.8944468	537	23.1732604	8.1281448
493	22.2036033	7.8997917	538	23.1948270	8.1331870
494	22.2261107	7.9051294	539	23.2163735	8.1382230
495	22.2485955	7.9104599	540	23.2379000	8.1432528

Z.	Q.Wurzel.	K.Wurzel.	Z.	Q.Wurzel.	K.Wurzel.
541	23.2594067	8.1482764	586	24.2074368	8.3682094
542	23.2808935	8.1532939	587	24.2280829	8.3729667
543	23.3023604	8.1583056	588	24.2487113	8.3777187
544	23.3238076	8.1633102	589	24.2693222	8.3824652
545	23.3452350	8.1683091	590	24.2899156	8.3872065
546	23.3666429	8.1733020	591	24.3104916	8.3919424
547	23.3880311	8.1782887	592	24.3310500	8.3966729
548	23.4093998	8.1832694	593	24.3515913	8.4013981
549	23.4307490	8.1882441	594	24.3721152	8.4061180
550	23.4520788	8.1932127	595	24.3926218	8.4108326
551	23.4733892	8.1981752	596	24.4131112	8.4155423
552	23.4946802	8.2031318	597	24.4335834	8.4202460
553	23.5159520	8.2080824	598	24.4540385	8.4249447
554	23.5372046	8.2130271	599	24.4744765	8.4296383
555	23.5584379	8.2179657	600	24.4948974	8.4343266
556	23.5796522	8.2228985	601	24.5153013	8.4390098
557	23.6008474	8.2278253	602	24.5356883	8.4436877
558	23.6220236	8.2327463	603	24.5560583	8.4483605
559	25.6431803	8.2376614	604	24.5764114	8.4530281
560	23.6643191	8.2425706	605	24.5967477	8.4576905
561	23.6854385	8.2474739	606	24.6170672	8.4623478
562	23.7065392	8.2523715	607	24.6373699	8.4670001
563	23.7276210	8.2572632	608	24.6576560	8.4716472
564	23.7486841	8.2621492	609	24.6779253	8.4762891
565	23.7697286	8.2670294	610	34.6981781	8.4809261
566	23.7907545	8.2719038	611	24.7184140	8.4855580
567	23.8117618	8.2767725	612	24.7386337	8.4901847
568	23.8327506	8.2816355	613	24.7588368	8.4948055
569	23.8537209	8.2864927	614	24.7790234	8.4994232
570	23.8746727	8.2913443	615	24.7991935	8.5040349
571	23.8956063	8.2961902	616	24.8193473	8.5086417
572	23.9165215	8.3010305	617	24.8394847	8.5132434
573	23.9374184	8.3058651	618	24.8596058	8.5178402
574	23.9582971	8.3106941	619	24.8797106	8.5224321
575	23.9791576	8.3155175	620	24.8997992	8.5270189
576	24.0000000	8.3203352	621	24.9198716	8.5316009
577	24.0208241	8.3251475	622	24.9399278	8.5361779
578	24.0416305	8.3299542	623	24.9599679	8.5407501
579	24.0624188	8.3347553	624	24.9799919	8.5453173
580	24.0831891	8.3395508	625	25.0000000	8.5498797
581	24.1039416	8.3443410	626	25.0199920	8.5544372
582	24.1246761	8.3491256	627	25.0399680	8.5589899
583	24.1453929	8.3539047	628	25.0599281	8.5635377
584	24.1660919	8.3586783	629	25.0798724	8.5680807
585	24.1867732	8.3634465	630	25.0998007	8.5726188

Z.	Q.Wurzel.	K.Wurzel.	Z.	Q.Wurzel.	K.Wurzel.
631	25.1197133	8.5771522	676	26.0000000	8.7763829
632	25.1396102	8.5816808	677	26.0192236	8.7807084
633	25.1594912	8.5862048	678	26.0384331	8.7850296
634	25.1793566	8.5907238	679	26.0576284	8.7893466
635	25.1992063	8.5952380	680	26.0768096	8.7936593
636	25.2190404	8.5997476	681	26.0959767	8.7979679
637	25.2388587	8.6042524	682	26.1151297	8.8022721
638	25.2586619	8.6087526	683	26.1342687	8.8065722
639	25.2784493	8.6132480	684	26.1533936	8.8108681
640	25.2982213	8.6177388	685	26.1725047	8.8151598
641	25.3179778	8.6222248	686	26.1916017	8.8194473
642	25.3377189	8.6267062	687	26.2106848	8.8237307
643	25.3574446	8.6311829	688	26.2297541	8.8280099
644	25.3771551	8.6356551	689	26.2488095	8.8322850
645	25.3968502	8.6401226	690	26.2678511	8.8365559
646	25.4165300	8.6445855	691	26.2868789	8.8408227
647	25.4361946	8.6490437	692	26.3058929	8.8450853
648	25.4558441	8.6534974	693	26.3248931	8.8493446
649	25.4754784	8.6579465	694	26.3438797	8.8535985
650	25.4950975	8.6623901	695	26.3628526	8.8578489
651	25.5147014	8.6668310	696	26.3818119	8.8620951
652	25.5342906	8.6712665	697	26.4007575	8.8663373
653	25.5538646	8.6756974	698	26.4196896	8.8705757
654	25.5734237	8.6801238	699	26.4386081	8.8748099
655	25.5929678	8.6845456	700	26.4575131	8.8790400
656	25.6124969	8.6889630	701	26.4764046	8.8832616
657	25.6320112	8.6933758	702	26.4952825	8.8874882
658	25.6515107	8.6977842	703	26.5141471	8.8917062
659	25.6709953	8.7021882	704	26.5329983	8.8969204
660	25.6904651	8.7065876	705	26.5518361	8.9001304
661	25.7099203	8.7109827	706	26.5706605	8.9043365
662	25.7293606	8.7153733	707	26.5894716	8.9085387
663	25.7487864	8.7197595	708	26.6082694	8.9127368
664	25.7681974	8.7241414	709	26.6270539	8.9169311
665	25.7875939	8.7285184	710	26.6458252	8.9211214
666	25.8069756	8.7328917	711	26.6645832	8.9253077
667	25.8263431	8.7372604	712	26.6833281	8.9294902
668	25.8456959	8.7416247	713	26.7020593	8.9336686
669	25.8650343	8.7459846	714	26.7207784	8.9378433
670	25.8843582	8.7503401	715	26.7394839	8.9420140
671	25.9036677	8.7546915	716	26.7581763	8.9461808
672	25.9229628	8.7590383	717	26.7768556	8.9503438
673	25.9422435	8.7633809	718	26.7955220	8.9545033
674	25.9615099	8.7677192	719	26.8141753	8.9586581
675	25.9807621	8.7720532	720	26.8328175	8.9628095

Z.	Q.Wurzel.	K.Wurzel,	Z.	Q.Wurzel.	K.Wurzel.
721	26.8514431	8.9669570	766	27.6767050	9.1497576
722	26.8700577	8.9711007	767	27.6947648	9.1537375
723	26.8886593	8.9752406	768	27.7128129	9.1577139
724	26.9072481	8.9793766	769	27.7308492	9.1616869
725	26.9258240	8.9835088	770	27.7488739	9.1656564
726	26.9443871	8.9876370	771	27.7668867	9.1696225
727	26.9629375	8.9917623	772	27.7848879	9.1735852
728	26.9814751	8.9958829	773	27.8028775	9.1775444
729	27.0000000	9.0000000	774	27.8208555	9.1815003
730	27.0185121	9.0041133	775	27.8388218	9.1854527
731	27.0370117	9.0082229	776	27.8567765	9.1894018
732	27.0554985	9.0123287	777	27.8747199	9.1933447
733	27.0739727	9.0164309	778	27.8926514	9.1972896
734	27.0924344	9.0205292	779	27.9105714	9.2012289
735	27.1108832	9.0246239	780	27.9284801	9.2051641
736	27.1293199	9.0287148	781	27.9463770	9.2090962
737	27.1477439	9.0328021	782	27.9642629	9.2130251
738	27.1661554	9.0368856	783	27.9821371	9.2169505
739	27.1845544	9.0409655	784	28.0000000	9.2208726
740	27.2029410	9.0450418	785	28.0178514	9.2247914
741	27.2213151	9.0491142	786	28.0356915	9.2287068
742	27.2396769	9.0531831	787	28.0535203	9.2326189
743	27.2580263	9.0572482	788	28.0713377	9.2365278
744	27.2763634	9.0613098	789	28.0891438	9.2404333
745	27.2946883	9.0653677	790	28.1069386	9.2443355
746	27.3130006	9.0694219	791	28.1247222	9.2482344
747	27.3313007	9.0734726	792	28.1424945	9.2521300
748	27.3495887	9.0775197	793	28.1602556	9.2560224
749	27.3678645	9.0815631	794	28.1780056	9.2599111
750	27.3861277	9.0856030	795	28.1957443	9.2637972
751	27.4043792	9.0896392	796	28.2134719	9.2676798
752	27.4226184	9.0936718	797	28.2311884	9.2715792
753	27.4408455	9.0977009	798	28.2488938	9.2754352
754	27.4590604	9.1017265	799	28.2665880	9.2793081
755	27.4772633	9.1057485	800	28.2842712	9.2831776
756	27.4954541	9.1097669	801	28.3019434	9.2870440
757	27.5136330	9.1137818	802	28.3196045	9.2909072
758	27.5317998	9.1177931	803	28.3372546	9.2947671
759	27.5499546	9.1218009	804	28.3548937	9.2986239
760	27.5680975	9.1258053	805	28.3725219	9.3024775
761	27.5862284	9.1298060	806	28.3901391	9.3063277
762	27.6043475	9.1338033	807	28.4077454	9.3101750
763	27.6224547	9.1377971	808	28.4253408	9.3140190
764	27.6405499	9.1417874	809	28.4429253	9.3178599
765	27.6586334	9.1457742	810	28.4604989	9.3216975

Z.	Q.Wurzel.	K.Wurzel.
811	28.4780617	9.3255320
812	28.4956137	9.3293634
813	28.5131543	9.3331916
814	28.5306850	9.3370163
815	28.5482048	9.3408386
816	28.5657137	9.3446574
817	28.5832118	9.3484731
818	28.6006993	9.3522857
819	28.6181760	9.3560952
820	28.6356421	9.3599022
821	28.6530977	9.3637049
822	28.6705423	9.3675051
823	28.6879766	9.3713022
824	28.7054002	9.3750963
825	28.7228131	9.3788873
826	28.7402157	9.3826752
827	28.7576077	9.3864600
828	28.7749891	9.3902418
829	28.7923601	9.3940207
830	28.8097206	9.3977964
831	28.8270706	9.4015691
832	28.8444102	9.4053387
833	28.8617393	9.4091054
834	28.8790581	9.4128691
835	28.8963666	9.4166296
836	28.9136646	9.4203372
837	28.9303523	9.4241419
838	28.9482296	9.4278936
839	28.9654967	9.4316423
840	28.9827535	9.4353880
841	29.0000000	9.4391307
842	29.0172362	9.4428704
843	29.0344623	9.4466072
844	29.0516781	9.4503410
845	29.0688837	9.4540719
846	29.0860791	9.4577999
847	29.1032644	9.4615249
848	29.1204395	9.4652469
849	29.1376045	9.4689661
850	29.1547595	9.4726825
851	29.1719045	9.4763959
852	29.1890390	9.4801061
853	29.2061637	9.4838136
854	29.2232784	9.4875182
855	29.2403830	9.4912199

Z.	Q.Wurzel.	K.Wurzel.
856	29.2574777	9.4949188
857	29.2745623	9.4986147
858	29.2916370	9.5023078
859	29.3087018	9.5059980
860	29.3257566	9.5096854
861	29.3428015	9.5133700
862	29.3598365	9.5170519
863	29.3768616	9.5207303
864	29.3938769	9.5244063
865	29.4108823	9.5280798
866	29.4278779	9.5317497
867	29.4448637	9.5354172
868	29.4618397	9.5390818
869	29.4788059	9.5427436
870	29.4957624	9.5464027
871	29.5127091	9.5500589
872	29.5296461	9.5537123
873	29.5465734	9.5573629
874	29.5634910	9.5610108
875	29.5803989	9.5646560
876	29.5972972	9.5682982
877	29.6141858	9.5719377
878	29.6310648	9.5755745
879	29.6479341	9.5792085
880	29.6647939	9.5828397
881	29.6816442	9.5864682
882	29.6984848	9.5900939
883	29.7153159	9.5937169
884	29.7321375	9.5973372
885	29.7489495	9.6009548
886	29.7657521	9.6045695
887	29.7825452	9.6081817
888	29.7993288	9.6117913
889	29.8161030	9.6153977
890	29.8328678	9.6190017
891	29.8496231	9.6226029
892	29.8663690	9.6262015
893	29.8831056	9.6297974
894	29.8998328	9.6333907
895	29.9165506	9.6369812
896	29.9332591	9.6405690
897	29.9499582	9.6441542
898	29.9666481	9.6477367
899	29.9833287	9.6513166
900	30.0000000	9.6548938

Z.	Q.Wurzel.	K.Wurzel.	Z.	Q.Wurzel.	K.Wurzel.
901	30.0166620	9.6584684	946	30.7571130	9.8166591
902	30.0333145	9.6620403	947	30.7733651	9.8201109
903	30.0499584	9.6656096	948	30.7896086	9.8235723
904	30.0665927	9.6691762	949	30.8058436	9.8270252
905	30.0832179	9.6727402	950	30.8220700	9.8304757
906	30.0998339	9.6763017	951	30.8382879	9.8339238
907	30.1164407	9.6798604	952	30.8544972	9.8373695
908	30.1330383	9.6834166	953	30.8706981	9.8408127
909	30.1496268	9.6869702	954	30.8868904	9.8442536
910	30.1662062	9.6905211	955	30.9030742	9.8476920
911	30.1827765	9.6940694	956	30.9192497	9.8511283
912	30.1993377	9.6976151	957	30.9354166	9.8545620
913	30.2158898	9.7011583	958	30.9515751	9.8579929
914	30.2324329	9.7046988	959	30.9677251	9.8614217
915	30.2489669	9.7082369	960	30.9838668	9.8648483
916	30.2654919	9.7117723	961	31.0000000	9.8682724
917	30.2820078	9.7153051	962	31.0161248	9.8716941
918	30.2985148	9.7188351	963	31.0322413	9.8751130
919	30.3150128	9.7223631	964	31.0483494	9.8785305
920	30.3315018	9.7258883	965	31.0644492	9.8819451
921	30.3479818	9 7294108	966	31.0805405	9.8853574
922	30.3644529	9.7329309	967	31,0966236	9.8887673
923	30.3809150	9.7364487	968	31.1126983	9.8921749
924	30.3973683	9.7399634	969	31.1287648	9.8955801
925	30.4138126	9.7434758	970	31.1448230	9.8989830
926	30.4302481	9.7469856	971	31.1608729	9.9023835
927	30.4466748	9.7504931	972	31.1769145	9.9057817
928	30.4630924	9.7539979	973	31.1929479	9.9091776
929	30.4795013	9.7575002	974	31.2089731	9.9125712
930	30.4959013	9.7610001	975	31.2249899	9.9159624
931	30.5122926	9.7644973	976	31.2409987	9.9193513
932	30.5286750	9.7679922	977	31.2569992	9.9227379
933	30.5450487	9.7714845	978	31.2729915	9.9261222
934	30.5614136	9.7749742	979	31.2889757	9.9295042
935	30.5777697	9.7784616	980	31.3049517	9.9328838
936	30.5941171	9.7819465	981	31.3209179	9.9362616
937	30.6104557	9.7854288	982	31.3368792	9.9396363
938	30.6267857	9.7889087	983	31.3528308	9.9430092
939	30.6431069	9.7923863	984	31.3687743	9.9463797
940	30.6594194	9.7958611	985	31.3847097	9.9497469
941	30.6757233	9.7993335	986	31.4006369	9.9531138
942	30.6920187	9.8028036	987	31.4165561	9.9564775
943	30.7083051	9.8062711	988	31.4324673	9.9598389
944	30.7245829	9.8097362	989	31.4483704	9.9631980
945	30.7408523	9.8131986	990	31.4642654	9.9665543

Z.	Q. Wurzel.	K. Wurzel.	Z.	Q. Wurzel.	K. Wurzel.
991	31.4801525	9.9699095	996	31.5594677	9.9866486
992	31.4960315	9.9732619	997	31.5753068	9.9899899
993	31.5119025	9.9766120	998	31.5911380	9.9933288
994	31.5277655	9.9799599	999	31.6069611	9.9966655
995	31.5436206	9.9833054	1000	31.6227766	10.0000000

Verbesserungen.

Seite 14. Zeile 10. lies Zahlen oder Größen statt Größen — S. 31. Z. 1. v. u. lies — cf statt + cf — S. 36. Z. 18. l. a. $\frac{f}{f}+\frac{c}{f}$ st. a. $\frac{f}{f}=\frac{c}{f}$ — S. 50. Z. 9. v. u. l. noch einen st. keinen — S. 55. Z. 7. l. $\frac{39x^2y}{52xy^2}$ st. $\frac{39x^2x}{52xy^2}$ — S. 58. Z. 4. v. u. l. $\frac{c}{m+n}$ st. $\frac{a}{m+n}$ — S. 73. Z. 4. l. x st. x^4 — S. 83. Z. 2. v. u. l. dda st. dba — S. 105. Z. 10. v. u. l. vor st. von — S. 113. Z. 11. l. Es sey b = st. Es sey = — S. 186. Z. 16. l. 4x — 400 st. 2x — 400 — S. 187. Z. 3. l. 557 st. 557x — S. 188. Z. 5. l. $\frac{x-2}{4}$ st. $\frac{x-2}{2}$ — S. 205. Z. 1. l. beiden andern Gleichungen st. beiden Gleichungen — S. 218. Z. 7. v. u. l. v Badener st. x Badener — S. 229. Z. 9. v. u. l. y^2-y st. y^2+2y — S. 230. Z. 4. v. u. l. q = 9 st. q = — 9 — S. 241. Z. 5. v. u. l. 143 st. 145 — S. 271. Z. 5. v. u. l. biquadratischen Gleichungen st. biquadratischen — S. 284. Z. 7. l. x + 3 st. x — 3 — S. 288. ist überall v st. w zu setzen — S. 354. Z. 13. l. 50 st. 30 — S. 363. Z. 5. v. u. l. $(S-a)^{n-1}$ st. $(S-)^{n-1}$ — S. 385. Z. 16. l. 4,56285 st. 4,56284 — S. 403. Z. 12. l. 4,5 st. 45, und Z. 13. l. Log. $(\Sigma+2222{,}2) =$ st. Log. $\Sigma =$.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Weigl, Johann Baptist,

Lehrbuch der Arithmetik und Algebra zum öffentlichen Gebrauche und Selbstunterrichte

Bd.: 2

Sulzbach (1832)

Math.p. 633 c-1/2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10083071-5